Combinatoire

Alix Deleporte

21 août 2015

1 Principes de base

La combinatoire peut être définie comme l'art de compter de la manière la moins fatigante possible. Il est parfois fastidieux de compter à la main des éventualités, surtout quand le nombre final dépasse la centaine, ce qui arrive très vite. De quelles techniques dispose-t-on ?

D'abord, la disjonction de cas. Il est évident que si on dispose de billes vertes et de billes rouges, le nombre total de billes vaut la somme du nombre de billes vertes et de billes rouges. Ce principe est néanmoins d'une extrême utilité.

Ensuite, la séparation des choix. Voyons un exemple simple :

Exercice 1. Combien y a-t-il de nombres entiers pairs à deux chiffres ? (Un nombre à deux chiffres ne peut pas commencer par zéro)

Solution de l'exercice 1. Bien sûr, on peut tous les écrire. Néanmoins, il s'agit de ne pas se fatiguer. La condition « être pair »porte sur le chiffre des unités, il faut que celui-ci appartienne à $\{0,2,4,6,8\}$. La condition « être à deux chiffres »porte sur le chiffres des dizaines, qui ne peut pas être 0. Pour choisir un tel nombre, il faut donc choisir le chiffre des dizaines, parmi 9 choix possibles, puis le chiffre des unités, parmi 5 choix possibles. En tout, il y a 45 choix. □

Exercice 2. Combien y a-t-il de manière de choisir quatre entiers positifs différents, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, tous compris entre 1 et 500, tels que ces nombres soient les quatre premiers terme d'une suite géométrique de raison entière ? Autrement dit, tels que $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = q \in \mathbb{N}$?

Solution de l'exercice 2. La donnée de (q, x_1) détermine les autres nombres de manière unique. Il suffit d'examiner les choix possibles pour ce couple. On a $1 \leq x_1$ et $500 \geq x_4 = q^3 x_1$. On a donc $q \leq \sqrt[3]{500} = 7,937\ldots$. Donc $2 \leq q \leq 7$.

A q fixés, combien y a-t-il de valeurs de x_1 qui conviennent ? Il faut et suffit que $1 \leq x_1 \leq \dfrac{500}{q^3}$.

— Pour $q = 2$, il y a donc $\left\lfloor \dfrac{500}{8} \right\rfloor = 62$ possibilités.

— Pour $q = 3$, il y a $\left\lfloor \dfrac{500}{27} \right\rfloor = 18$ possibilités.

— Pour $q = 4$, il y a $\left\lfloor \dfrac{500}{64} \right\rfloor = 7$ possibilités.

— Pour $q = 5$, il y a $\left\lfloor \dfrac{500}{125} \right\rfloor = 4$ possibilités.

— Pour $q = 6$, il y a $\left\lfloor \dfrac{500}{216} \right\rfloor = 2$ possibilités.

— Pour $q = 7$, il y a $\left\lfloor \dfrac{500}{343} \right\rfloor = 1$ possibilité.

Tous ces cas sont distincts, il y a donc en tout 94 possibilités. □

2 Permutations

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, est une application de cet ensemble dans lui-même, qui est bijective, c'est-à-dire tel que chaque élément ait un unique antécédent. Si σ est une telle fonction, on abrègera souvent $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ la permutation.

Par exemple, l'application qui va de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même, qui envoie 1 sur 1, 2 sur 3 et 3 sur 2 est la permutation notée $(1, 3, 2)$.

Peut-on compter les permutations ?

Proposition 2. Soit n un entier. Il existe $n!$ permutations à n éléments.

Démonstration. On va appliquer l'outil de base des stratégies de dénombrement, la décomposition en choix successifs.

Combien de choix y a-t-il pour une permutation σ ? Il s'agit d'abord de choisir $\sigma(1)$, et il y a n choix possibles. Ensuite il faut choisir $\sigma(2)$. Il y a $n-1$ choix possibles, puisque $\sigma(1)$ ne doit avoir qu'un antécédent. On choisit tous les éléments de cette façon, et il y a donc $n!$ façons de faire. $\square$

Remarque 3. La rédaction de ce type de raisonnement est toujours délicate.

Exercice 3. Démontrer la même formule, par récurrence.

Démonstration. Allons-y. Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule permutation, celle qui à 1 associe 1. Donc, on a gagné.

Procédons par récurrence. Supposons qu'il y a $n!$ permutations de $\{1, \dots, n\}$ et comptons les permutations de $\{1, \dots, n+1\}$.

Il y en a de deux sortes. D'abord, il y a les permutations σ telles que $\sigma(n+1) = n+1$. Il y a, par hypothèse, $n!$ éléments de la sorte. Ensuite, il y a celles telles que $\sigma(n+1) = k$ pour un certain $k \leq n$. Or, à k fixé, il y a autant de permutations de $n+1$ éléments telles que $\sigma(n+1) = k$ que de permutations à n éléments. Pourquoi ? Parce qu'à une permutation τ à n éléments, on peut associer de manière unique la permutation qui à $n+1$ associe k, qui à $\tau^{-1}(k)$ associe $n+1$, et qui vaut τ pour les autres valeurs.

Il y a donc en tout $n! + n \cdot n! = (n+1)!$ permutations à $n+1$ éléments. $\square$

3 Arrangements, combinaisons

Les arrangements répondent au problème suivant. Si on se donne deux entiers $k \leq n$, combien y a-t-il de façons de choisir k éléments l'un après l'autre parmi n ?

Encore une fois, on applique le principe de choix. On choisit d'abord le premier élément, et pour cela il y a n choix possibles. On choisit ensuite le deuxième, ce qui fait $n-1$ possibilités. On continue jusqu'à avoir choisi k éléments ; la réponse est donc $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Ce nombre est souvent abrégé P_n^k.

Les combinaisons, quant à elles, répondent à un problème semblable. Combien y a-t-il de façons de choisir k éléments parmi n, l'ordre ne comptant pas ?

Il est bien plus dur de compter directement les combinaisons. On va appliquer le principe de Lagrange, qui se résume sous la forme suivante : « Pour compter le nombre de moutons, on compte le nombre de pattes, et on divise par quatre ».

En effet, chaque combinaison est un arrangement dans lequel on a oublié l'ordre. On peut grouper les arrangements en des « paquets »d'éléments représentant la même combinaison. Pour compter les paquets, il suffit de compter le nombre total d'arrangements, ce qu'on a déjà fait, et le nombre d'arrangements dans chaque paquet, ce qu'on va faire maintenant.

Deux arrangements représentent la même combinaison si et seulement si ils ont les mêmes éléments, ordonnés dans un ordre différent. Combien existe-t-il de façons d'ordonner k éléments ? C'est le nombre de permutations d'un ensemble à k éléments, soit $k!$.

En conclusion, le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ce nombre est souvent abrégé $\binom{n}{k}$.

Remarque 4. On a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ce qui est naturel : il y a autant de sous-ensembles à k éléments que de complémentaires de ces ensembles, qui ont chacun $n-k$ éléments.

Le raisonnement précédent permet de démontrer que le nombre $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est entier, ce qui n'est pas évident a priori. L'un des sous-produits de la combinatoire est de montrer que certaines quantités sont entières en les exprimant comme le nombre de façons de faire quelque chose.

Exercice 4. Montrer de deux manières différentes la formule bien connue :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Solution de l'exercice 3. Première manière : on écrit la formule. On a :

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}.\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on analyse le nombre de façons de choisir $k+1$ objets parmi $n+1$. Fixons un élément x, il y en a de deux sortes de façons de choisir :

— Ou bien on a choisi x. Il reste alors à choisir k éléments parmi n.

— Ou bien on n'a pas choisi x. Il reste alors à choisir $k+1$ éléments parmi n.

Le nombre total de façons de choisir est donc bien $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$. $\square$

Exercice 5. Montrer de deux manières différentes que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

<u>*Solution de l'exercice 4.*</u> La première manière est d'utiliser la formule précédente, et de procéder par récurrence. On a bien sûr $\binom{0}{0}=1=2^0$. Procédons par récurrence. Supposons le résultat vrai au rang n, et écrivons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} &= 2+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\\ &= 2+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\\ &= 2+(2^n-1)+(2^n-1)=2^{n+1}\end{aligned}$$

La seconde manière est l'interprétation combinatoire. Le membre de gauche dans l'équation est la somme sur $k\leq n$ des manières de choisir k éléments parmi n. Il s'agit donc du nombre total de sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$. Combien y a-t-il de ces sous-ensembles ? L'élément 1 peut être choisi, ou pas, ce qui fait 2 possibilités. Il en va de même pour tous les autres éléments, de manière indépendante. Donc il y a 2^n sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$. $\square$

4 TD

Exercice 1. (Olympiades chinoises - 1994) On considère la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ consistant en l'ensemble des entiers naturels premiers avec 105, rangés dans l'ordre croissant. Calculer a_{1994}.

Exercice 2. Combien y a-t-il de nombres à cinq chiffres plus grands que 21300, tels que les chiffres de ces nombres sont tous différents et sont dans $\{1,2,3,4,5\}$?

Exercice 3. Soient k et n deux entiers positifs. Combien y a-t-il de façons d'écrire n comme la somme de k entiers positifs ?

Exercice 4. Quel est le nombre de sous-ensembles de k éléments de $\{1,2,\dots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

Exercice 5. On considère un polygone convexe à n sommets, tels que trois quelconques de ses diagonales ne sont pas concourantes. Combien existe-t-il de points où deux diagonales s'intersectent ?

Exercice 6. (Concours général - 1985) Soient p et q deux entiers positifs. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^{p+k}}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^{q+k}}\binom{q+k}{k} = 2.$$

Indication : on pourra dénombrer le nombre de sous-ensembles de $\{1,\dots,p+q+1\}$ possédants au moins $p+1$ éléments, en fonction de la position du plus grand élément.

Exercice 7. Deux dresseurs, A et B, possèdent chacun 6 Pokémon différents. Chacun ordonne ses Pokémon, puis ils se défient. Le premier Pokémon de A est envoyé contre le premier Pokémon de B. Puis, à chaque fois que l'un des Pokémon est battu, il est remplacé par le Pokémon suivant, dans l'ordre qu'a choisi à l'avance son dresseur. Lorsque l'un des dresseurs n'a plus de Pokémon, le combat se termine.

Combien peut-il y avoir de combats différents ?