Géométrie - fondamentaux

Alix Deleporte

18 août 2015

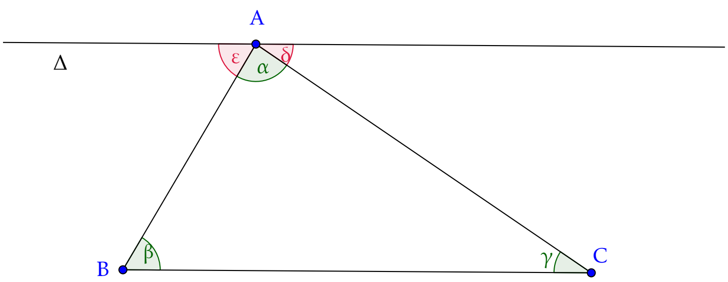
1 Constructions fondamentales

On commence par rappeler, et redémontrer, les théorèmes les plus basiques, et les plus utiles, en géométrie.

1.1 Angles

Proposition 1. La somme des angles internes d'un triangle fait un angle plat.

Démonstration. Soit ABC un triangle, et Δ la droite passant par A et parallèle à (BC).



En utilisant les notations de la figure, les angles β et ϵ sont égaux, et de même $\delta = \gamma$, ce dont on déduit $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \epsilon + \delta = \pi$. $\square$

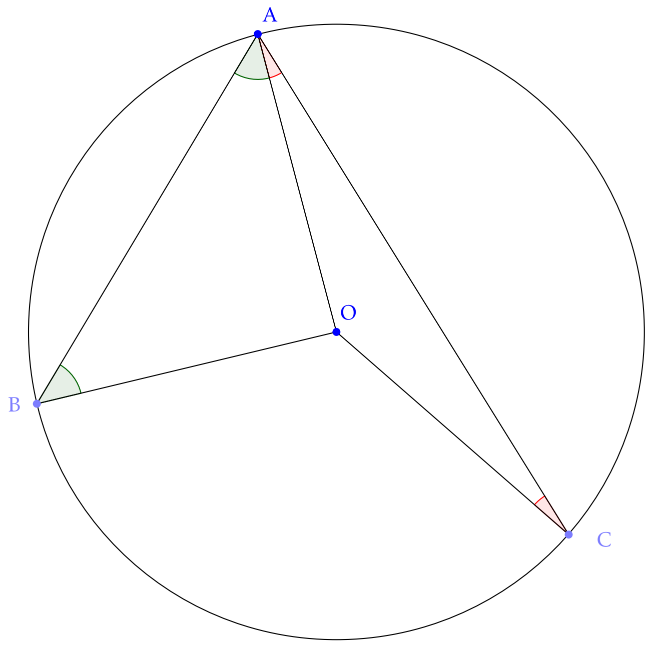
Exercice 1. Quelle est la somme des angles internes d'un quadrilatère non croisé quelconque ?

Solution de l'exercice 1. On peut découper tout quadrilatère non croisé en deux triangles, donc la réponse est 2π. $\square$

C'est la propriété fondamentale des angles, qui amène à la tactique de *chasse aux angles* : pour résoudre un problème, on cherche tous les angles de la figure. La proposition suivante, qui sert également à la chasse aux angles, en est un excellent exemple.

Proposition 2. Soient A, B, C trois points sur un cercle de centre O. Alors $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$

Démonstration.



On utilise le fait que les triangles isocèles ont deux angles égaux, ainsi que le théorème précédent. Ainsi,

$$\begin{aligned}\widehat{BOC} &= 2\pi - \widehat{COA} - \widehat{AOB}\\ &= 2\pi - (\pi - \widehat{BAO}) + (\pi - \widehat{OAC})\\ &= 2\widehat{BAC}\end{aligned}$$

□

On retiendra deux cas particuliers de ce théorème. D'une part, si trois points A, B, C dans un cercle forment un triangle rectangle en A, alors [BC] est un diamètre du cercle. D'autre part :

Exercice 2. Soit ABCD un quadrilatère convexe. Montrer que les quatre sommets sont sur un même cercle si et seulement si $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, si et seulement si $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$.

Solution de l'exercice 2. Démontrons la première équivalence. Si A, B, C, D sont sur le même cercle, de centre O, alors $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$, et de même $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{CBD}$. Réciproquement, si $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, soit Γ le cercle circonscrit à ACD, et B' le point à l'intersection de Γ avec (BC) du même côté que B. Alors $\widehat{CBD} = \widehat{CB'D}$, donc $B = B'$.

Pour la deuxième équivalence, on sutilise le fait que la somme des angles d'un quadrilatère non croisé fait 2π. □

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et S l'intersection de la bissectrice de A avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que BSC est isocèle.

Solution de l'exercice 3. On utilise la propriété de l'arc capable. On a en effet, d'une part, $\widehat{CBS} = \widehat{CAS}$, et d'autre part $\widehat{BCS} = \widehat{BAS}$, ce dont on déduit que $\widehat{CBS} = \widehat{CBS}$ et qu'à ce titre, le triangle est isocèle en S. □

1.2 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs du plan, dont les propriétés sont semblables à une multiplication, et dont le résultat est un nombre réel. Il permet de traduire certaines propriétés géométriques en des propriétés algébriques, et réciproquement.

Définition 3. Soient A, B, C trois points du plan. On note $\overrightarrow{AB} = \binom{x_1}{y_1}$ et $\overrightarrow{AC} = \binom{x_2}{y_2}$, et on note H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors on a :

$$\overline{AC} \cdot \overline{AH} = AC \cdot AB \cos \widehat{BAC} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Cette quantité est appelée produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et notée $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire vérifie, pour tous vecteurs u, v, w, que $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie), et $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda u \cdot w + \mu v \cdot w$ (distributivité).

Démonstration. Comment démontrer tout celà en faisant le moins de calculs possibles ? Un plan d'attaque est le suivant. On commence par démontrer que les deux premières quantités sont égales (1), et que l'opération définie de la sorte vérifie toutes les propriétés (2). C'est aussi vrai pour l'opération définie par la troisième quantité (3) ; or ces deux opérations sont égales lorsque les vecteurs sont chacun soit $\vec{i}$, soit $\vec{j}$, l'un des deux vecteurs de base du plan orthonormé (4) ; ce dont on va déduire l'égalité pour tous les couples de vecteurs. (5)

1. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points du plan, et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Puisque le triangle ABH est rectangle en H, on a $\mathrm{AH} = \cos(\alpha)\mathrm{AB}$, où α est l'angle intérieur de ABH en A.

   Deux cas de figure sont possibles ; ou bien H est du même côté de A que C, auquel cas $\alpha = \widehat{\mathrm{BAC}}$, et on a bien $\mathrm{AH} \cdot \mathrm{AC} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$. Ou bien H est de l'autre côté, auquel cas $\alpha = \pi - \widehat{\mathrm{BAC}}$, et on a $-\mathrm{AH} \cdot \mathrm{AC} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$.
2. La forme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$ montre bien la symétrie de l'opération. Pour la linéarité, il faut montrer d'une part que $(\lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})$, ce qui se voit directement en utilisant la première forme et le théorème de Thalès, et d'autre part que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, ce qui se voit directement en utilisant la première forme.
3. Exercice.
4. Soient $\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}$ les trois points qui définissent le repère orthonormé. Alors les deux versions du produit scalaire donnent chacune $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 1$ et $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 0$.
5. Soient $u = \binom{x_1}{y_1}$ et $v = \binom{x_2}{y_2}$ deux vecteurs, et notons $u \cdot v$ le résultat de la première version du produit scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (x_1 \overrightarrow{\mathrm{OI}} + y_1 \overrightarrow{\mathrm{OJ}}) \cdot (x_2 \overrightarrow{\mathrm{OI}} + y_2 \overrightarrow{\mathrm{OJ}}) \\ &= x_1 x_2 \overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}} + x_1 y_2 \overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OJ}} + y_1 x_2 \overrightarrow{\mathrm{OJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OI}} + y_1 y_2 \overrightarrow{\mathrm{OJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OJ}} \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{aligned}$$

□

Deux cas particuliers sont à noter. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont trois points distincts, $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{AC})$ est équivalent à $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$. D'autre part, si u est un vecteur, la quantité $u \cdot u$ est le carré de la norme de u, elle est notée $\|u\|^2$.

Exercice 4. Montrer l'identité du parallélogramme : pour tous vecteurs u et v, on a :

$$u \cdot v = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

Proposer une interprétation géométrique de cette relation.

2 Droites remarquables dans le triangle

Dans toute cette section, on se donne ABC un triangle, sur lequel on pourra effectuer des hypothèses diverses.

2.1 Les centres du triangle

Définition 4. On appelle *médianes* d'un triangle les trois droites qui passent chacune par un point et par le milieu du côté opposé. On appelle aussi *hauteurs* d'un triangle les trois droites qui passent chacune par un point et qui sont perpendiculaires au côté opposé. Par convention, on appelle médiatrices les médiatrices des trois côtés, et bissectrices les bissectrices intérieures des trois angles.

Proposition 5. Les trois hauteurs d'un triangle s'intersectent en un point appelé orthocentre du triangle.

Les trois médianes s'intersectent en un point appelé barycentre du triangle.

Les trois médiatrices s'intersectent au centre de l'unique cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

Les trois bissectrices s'intersectent au centre de l'unique cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

Démonstration. Pour les médiatrices et les bissectrices, c'est un exercice. Pour les médianes et les hauteurs, cf TD. □

3 TD

Exercice 1. Montrer que les trois médiatrices sont concourantes, ainsi que les trois bissectrices.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On appelle K le milieu de [BC] et J le milieu de [AC]. Les droites (BJ) et (CK) se coupent en un point G. Montrer que l'aire de BGK est la moité de l'aire de BCG.

En déduire que les trois médianes d'un triangle s'intersectent.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et G son barycentre. Monter $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

Exercice 4. Soit ABC un triangle ; on pose H l'intersection des hauteurs issues de A et de B, et H′ le symétrique de H par rapport à (BC). Montrer que A, B, H', C sont cocycliques, et en déduire que les trois hauteurs sont concourantes.

Exercice 5. Démontrer que les hauteurs sont concourantes en utilisant le produit scalaire.

Exercice 6. Démontrer que si H est l'orthocentre de ABC, alors A est l'orthocentre de BHC.

Exercice 7. Soit ABC un triangle, montrer que le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité G et l'orthocentre H sont alignés, et plus précisément que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Si ABC *n'est pas équilatéral, on appelle droite d'Euler la droite qui passe par* O, G *et* H.

Exercice 8. (un peu de chasse aux angles...) Soient Γ et Γ' deux cercles qui s'intersectent en deux points distincts, M et N. On note Δ la droite tangente commune aux deux cercles plus proche de M que de N ; Δ touche Γ en A et Γ' en B. On note Δ_2 la parallèle à Δ qui passe par M ; Δ_2 recoupe Γ en C et Γ' en D. On note alors P l'intersection de (AN) et (CM), D l'intersection de (BN) et (MD), et E l'intersection de (AC) et (BD). Montrer que EP = EQ.