Géométrie - Droite et cercle d'Euler

Alix Deleporte

18 août 2015

1 Droite et cercle d'Euler

Dans toute cette section, on se donne un triangle non équilatéral ABC. On note I, J, K les milieux respectifs des côtés BC, AC, AB. Les points remarquables du triangle ABC sont notés comme suit : G est le barycentre, O le centre du cercle circonscrit, et H l'orthocentre. On remarque alors que les points O et G sont distincts.

1.1 Droite d'Euler

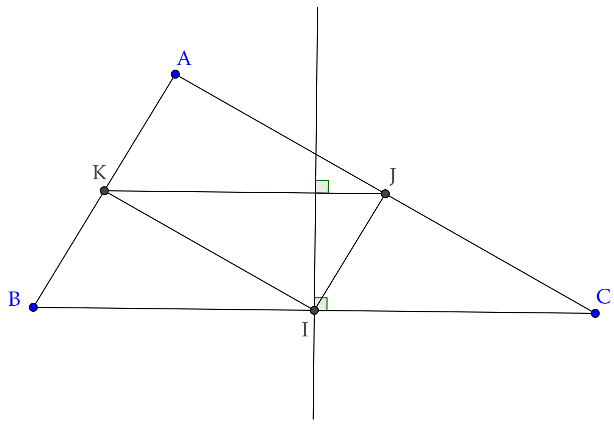
Proposition 1. Les points O, G, H sont alignés dans cet ordre ; on a $GH = 2GO$.

Démonstration. Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG}$. Alors par la propriété du barycentre, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Autrement dit, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OI}$, donc $(AM) \perp (BC)$. De même, $(BM) \perp (AC)$ et $(CM) \perp (AB)$, donc M est à l'intersection des trois hauteurs. □

Définition 2. On appelle *droite d'Euler* la droite qui joint les points.

Exercice 1. Montrer que le centre du cercle circonscrit à IJK appartient aussi à la droite d'Euler.

<u>*Solution de l'exercice 1.*</u>



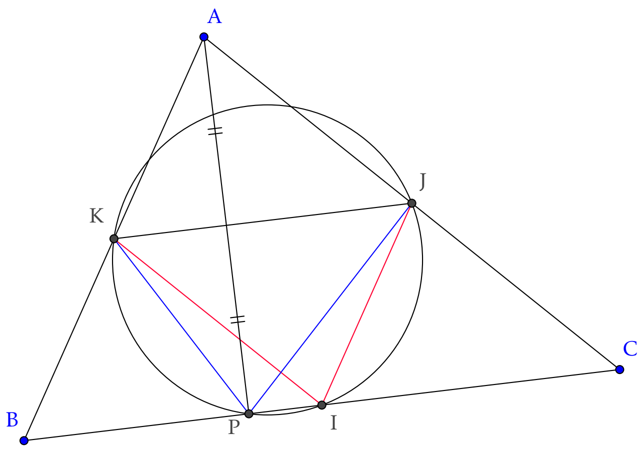
La hauteur issue de I dans le triangle IJK est la droite issue de I et perpendiculaire à (JK), elle-même parallèle à (BC) ; c'est donc la médiatrice de (BC). Il en résulte que les hauteurs du petit triangle sont les médiatrices du grand triangle. De plus, les médianes du petit triangle sont les médianes du grand triangle, par Thalès ; de celà on déduit que les droites d'Euler des deux triangles sont confondues. $\square$

Le triangle IJK est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre G et de rapport 1/2. Le rayon du cercle circonscrit à IJK est donc moitié moindre que le rayon du cercle circonscrit à ABC ; et en notant O' le centre du cercle circonscrit à IJK, on sait que O, G, O' sont alignés dans cet ordre, avec $GO = 2GO'$.

Définition 3. On note *cercle d'Euler* le cercle circonscrit à IJK.

Proposition 4. Les pieds des trois hauteurs à ABC appartiennent au cercle d'Euler.

Démonstration. Soit P le pied de la hauteur issue de A. Il s'agit de montrer que $\widehat{JPK} = \widehat{JIK}$. Comme AJIK est un parallélogramme, on a $\widehat{JIK} = \widehat{BAC}$. Par ailleurs, on a $(AP) \perp (JK)$, et ces deux droites se coupent en le milieu de (JK) par le théorème de Thalès. Donc J est le symétrique du triangle A par la symétrie de droite (JK), ce dont on déduit $\widehat{JPK} = \widehat{BAC}$.



□

Proposition 5. Le milieu des côtés [AH], [BH], [CH] appartient aussi au cercle d'Euler.

Démonstration. Considérons l'homothétie de centre H et de rapport 1/2. Il faut démontrer que l'image du cercle circonscrit à ABC est le cercle d'Euler. Le rayon des cercles est le même, qu'en est-il du centre ?

Souvenons-nous que, d'une part, $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{GO}$, et d'autre part, si O′ est le centre du cercle d'Euler, alors $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GO'}$. Ainsi, on a $\overrightarrow{HO'} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GO'} = 2/3\,\overrightarrow{HO} - 1/6\,\overrightarrow{HO} = 1/2\,\overrightarrow{HO}$, donc O′ est bien l'image de O par l'homothétie qu'on a considéré ; ceci permet de conclure. □

Le cercle d'Euler est parfois appelé *cercle des neuf points*.

Exercice 2. Supposons que ABC est isocèle en A (non équilatéral). Montrer que le cercle inscrit et le cercle d'Euler se touchent en un unique point.

Solution de l'exercice 2. Le cercle inscrit et le cercle d'Euler s'intersectent en I, le milieu de [BC]. Par ailleurs, par symétrie, le centre de ces deux cercles appartient à la droite (AI). Par ailleurs, le pied de la hauteur issue de B étant un point différent du milieu de [AC], la droite (AC) intersecte le cercle d'Euler en deux points distincts, mais est tangente au cercle inscrit ; donc les deux cercles sont différents, et ils n'ont qu'un unique point d'intersection. □

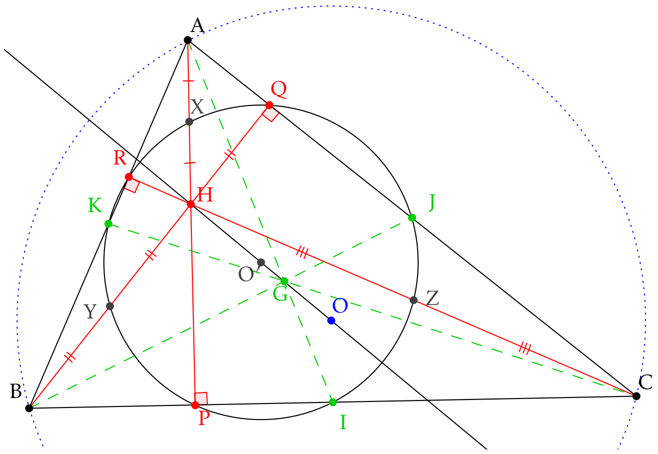


FIGURE 1 – Droite et cercle d'Euler

Remarque 6. C'est vrai de manière générale, mais c'est beaucoup plus difficile à montrer (Théorème de Feuerbach)

2 TD : chasse aux angles

Exercice 1. Soit ABC un triangle, H son orthocentre, et A', B', C' les pieds des trois hauteurs. Montrer que H est le centre du cercle inscrit à $A'B'C'$.

Exercice 2. Le théorème du pôle Sud : soit ABC un triangle, et S l'autre intersection de la bissectrice issue de A et du cercle circonscrit. Rappeler pourquoi le triangle SBC est isocèle.

Démontrer que S est le centre du cercle circonscrit à BCD, où D est le centre du cercle inscrit à ABC.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et M, N, P trois points qui appartiennent respectivement aux droites (BC), (AC) et (AB), et non égaux à A, B ou C.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ANP, BMP et CMN sont concourants.

Montrer que ce point de concourance est cocyclique à ABC, si et seulement si les points M, N, P sont alignés.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, et P un point quelconque du plan. On note A_1 le projeté orthogonal de P sur (BC) (c'est le pied de la perpendiculaire à (BC) qui passe par P), B_1 le projeté orthogonal de B sur (AC) et C_1 le projeté orthogonal de C sur (AB). On réitère le procédé à partir de $A_1B_1C_1$ pour former $A_2B_2C_2$, puis encore une fois pour avoir $A_3B_3C_3$. Montrer que les triangles ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

Exercice 5. Soient Γ et Γ' deux cercles qui s'intersectent en deux points distincts, M et N. On note Δ la droite tangente commune aux deux cercles plus proche de M que de N ; Δ touche Γ en A et Γ' en B. On note Δ_2 la parallèle à Δ qui passe par M ; Δ_2 recoupe Γ en C et Γ' en D. On note alors P l'intersection de (AN) et (CM), D l'intersection de (BN) et (MD), et E l'intersection de (AC) et (BD). Montrer que $EP = EQ$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle équilatéral, et M un point sur son cercle circonscrit, entre B et C. Montrer que $MB + MC = MA$.