

TD 1

22 au 26 janvier 2018

1 Calcul d'intégrales

Exercice 1. Trouver des primitives des fonctions suivantes :

$$1. t \mapsto 4t^3 - 2t^2 + t + 7 \quad 2. t \mapsto \sin(5t) \quad 3. t \mapsto \sqrt{t}. \quad 4. t \mapsto \frac{1}{1+t^2}.$$

Exercice 2. Trouver des primitives (sur des ensembles de définition bien choisis) des fonctions suivantes :

$$1. t \mapsto te^{t^2} \quad 2. t \mapsto \frac{\ln t}{t} \quad 3. t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \quad 4. \text{(DM)} t \mapsto e^t \cos(t)$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \quad \int_1^2 \ln t \, dt \quad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt \quad 4. \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$1. \int_1^e t^n \ln t \, dt \quad 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

Exercice 5.

- Donner une formule de récurrence pour $A_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt$.
- En admettant que $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donner un équivalent de A_n en $+\infty$.

Exercice 6. (*) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) \, dt$

2 Séries numériques

Exercice 7. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$1. u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \quad 2. u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad 3. \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 8. Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries de termes généraux

$$\text{sujets : } 1. u_n = e^{-n^\alpha} \quad 2. u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad 3. u_n = \exp(-\ln(n)^\alpha).$$