# TD 2
# 29 janvier -2 février 2018

## 1 Calcul d'intégrales

**Exercice 1.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi} \dfrac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ 2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 3. $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$ 4. $\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$

**Exercice 2.** On considère les deux suites d'intégrales $(I_n)_{n\geq 1}$ et $(J_n)_{n\geq 1}$, définies par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $J_n$ pour tout $n \geq 1$, en déduire que $J_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq J_n - I_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.
3. Donner un équivalent simple de $I_n$ en $+\infty$.

## 2 Propriétés de l'intégrale

**Exercice 3.** Soit $a < b$ deux réels, et $f \geq 0$ une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $\int_a^b f = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. On suppose que $f \leq 1$ et que $\int_a^b f = \int_a^b f^2$. Montrer que $f = 1$ ou $f = 0$.

**Exercice 4.** Soit $a < b$ deux réels, et $f$ continue sur $[a, b]$.

Montrer que $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, et que l'égalité a lieu si et seulement si f est, ou bien positive partout, ou bien négative partout.

**Exercice 5.** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, \pi]$.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{\pi} f(t)\sin(t-x)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $g(0) = 0$. Montrer que $f$ s'annule au moins une fois sur $]0, \pi[$.

3. On suppose que $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Montrer que $f$ s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

**Exercice 6.** **(DM)** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

## 3 Séries convergentes

**Exercice 7.** Soients $a \geq 1$ et $b > 0$.

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{a+nb}$ est convergente.
   Les questions suivantes vont permettre de calculer la somme de cette série.
2. Calculer $\int_0^1 t^{a-1}(-t^b)^n \, dt$.
3. En déduire que $\left|\int_0^1 \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b} \, dt - \sum_{n=0}^N \dfrac{(-1)^n}{a+nb}\right| \leq \dfrac{1}{a+(N+1)b}$.
4. Montrer que la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{a+nb}$ est $\int_0^1 \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b} \, dt$.
5. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Commenter ce résultat.