TD 3
5-9 février 2018

1 Propriétés de l'intégrale

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{|a|}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}-1)}\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$ 4. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}}.$

Exercice 2. Soit $a>b$, et $f[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ continue. On suppose que, pour toute fonction continue $g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ s'annulant en a et b, on a $\int_a^b fg=0$. Montrer que $f=0$.

Exercice 3. Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On suppose que $\int_0^1 f=0$, et on note $M=\max(f)$, $m=\min(f)$.

Montrer que $\int_0^1 f^2\leq -mM$.

Exercice 4. **(DM)** Soit $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ de classe C^2. Pour $n\geq 1$ on définit

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)-nf(0).$$

En utilisant un développement de Taylor, déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

2 Intégrale fonction des bornes

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée :

1.$x\mapsto\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ 2.$x\mapsto\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t$ 3.$x\mapsto\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 6. On considère la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Donner le plus grand ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe C^1. Etudier les variations de f.
3. Etudier le comportement de f au voisinage de 0.

4. Comparer $\ln(t)$ et $t\ln(t)$ pour $t \in D$. En déduire le comportement en 1 de f.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $F : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F peut être prolongée par continuité en zéro. A présent F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$.
3. Montrer que F est dérivable en zéro et que $F'(0) = 0$.

Exercice 8. Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est dérivable et que
$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que f est solution de l'équation $y'' + y = g$.
3. Trouver toutes les solutions de cette équation.