Poly d'exercices

Loic Teyssier & co

Table des matières

1 Nombres réels **1**
1.1 Développements, rationnels . . . 1
1.2 Borne supérieure . . . 3

2 Suites **5**
2.1 Définitions . . . 5
2.2 Suites extraites . . . 9

3 Continuité **9**
3.1 Premières définitions . . . 9
3.2 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 12
3.3 Suites définies par récurrence . . . 13

4 Dérivabilité **14**
4.1 Définitions . . . 14
4.2 Théorèmes des accroissements finis . . . 16

5 Développements de Taylor **17**

1 Nombres réels

1.1 Développements, rationnels

Exercice 1. On considère la suite géométrique de terme général $u_n = 10^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ calculer
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$$
2. Quelle est la limite de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$?
3. Discuter l'égalité
$$0,\overline{9} = 1.$$

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ admettant un développement décimal périodique à partir d'un certain rang k. Montrer que x est rationnel. (Indication : calculer $10^k x - x$).
2. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang (Indication : examiner l'algorithme de la division euclidienne).
3. En déduire que tout entier admet un multiple de la forme $10^n(10^k - 1)$ pour un certain couple (k, n).

Exercice 3. Écrire le nombre $2,4\overline{12}$ sous forme d'une fraction rationnelle réduite où $\overline{12}$ signifie que le bloc de chiffres 12 est répété *ad infinitum*.

Exercice 4. Montrer que

1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 5. Démontrer que tout nombre entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$n = c_l 10^l + c_{l-1} 10^{l-1} + ... + c_1 10 + c_0$$

où $c_j \in \{0, 1, ..., 9\}$ et $c_l \neq 0$.

Exercice 6.

1. Montrer $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
3. Montrer $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.
4. Montrer $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$.
5. Montrer $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$

Exercice 7.

1. Montrer $\forall a \in \mathbb{R}$, $a(1 - a) \leq \frac{1}{4}$.
2. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que au moins l'un des trois nombres $a(1 - b)$, $b(1 - c)$, $c(1 - d)$ sont inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 8. Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$$

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $< d_m ... d_0, d_{-1} ... >$ son écriture décimale propre. Exprimer d_j en fonction des nombres $(x 10^{-j})_{j \leq m}$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$
4. $0 \leq \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor \leq n - 1$

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 12. Soient $p, q \in \mathbb{N} \setminus 0$. Montrer que si p et q sont premiers entre eux, alors

$$\sum_{k=1}^{q-1} \lfloor \frac{kp}{q} \rfloor = \frac{(q-1)(p-1)}{2}$$

(Indication : utiliser l'exercice 10)

Exercice 13. Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose

$$m = \frac{x + y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 14. Soient x, y deux nombres réels. Montrer que

1. Si $x \leq y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul p (donc $p \in \mathbb{N}_{>0}$)

$$\left\lfloor \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

1.2 Borne supérieure

Exercice 15. Déterminer les bornes sup et inf des ensembles suivants, et préciser s'il s'agit de maximum/minimum ou pas :

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\{n^2 - 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$
4. $\{cos(2x + 1),\ x \in \mathbb{R}\}$
5. $\left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
6. $\{x \in \mathbb{R}, x^2 > x + 1\}$
7. $\left\{\frac{x^n}{|x^n-1|},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Exercice 16. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$ et préciser s'il s'agit du maximum ou du miminum avec $A = \left\{\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*\right\}$.

Exercice 17. Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des majorants de A forme un intervalle.

Exercice 18. Montrer que $I = \{x - y, x \in] - 1; 4[, y \in] - 3; -1[\}$ est un intervalle dont on précisera les bornes.

Exercice 19. Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$
$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$$

2. Existe-t-il des relations similaires pour $A \cap B$?

Exercice 20. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure des parties suivantes de $\overline{\mathbb{R}}$. En sont-elles le minimum et le maximum, respectivement ?

1. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
3. $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
4. $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $\left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
6. $\left\{\sin(\frac{1}{x}) | x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$

7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > x + 1\}$
8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > 2x^2 + x - 2\}$
9. $\left\{\frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

Exercice 21.

1. Soient $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et I un intervalle de bornes a et b. Montrer que
$$\sup(I) = b$$
$$\inf(I) = a.$$
2. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0, x \geq \epsilon$. Montrer que $\epsilon = 0$.

Exercice 22. Soient A et B deux parties non-vides de $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.
2. Montrer les relations suivantes
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$
3. Montrer les inégalités suivantes
$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$$
Pouvez-vous donner des exemples de A et B avec lesquels ces inégalités sont strictes ?

Exercice 23. Soient A et B deux parties non-vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $(\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b)$. Montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 24. Soient A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $B = \{|x - y| \ : x \in A, y \in A\}$. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 25. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornnées. Montrer que
$$\sup_{x \in \mathbb{R}}(|f(x) - g(x)|) \geq |\sup_{x \in \mathbb{R}}(f(x)) - \sup_{x \in \mathbb{R}}(g(x))|$$

Montrer que l'égalité n'est pas atteinte dans le cas où f et g sont des fonctions sinus et cosinus, respectivement.

2 Suites

2.1 Définitions

Exercice 26. Vrai ou faux ?

1. Le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
2. Si une suite tend vers zéro alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si une suite tend vers zéro par valeurs supérieures alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

4. Si $(|u_n|)$ converge vers ℓ alors (u_n) converge vers $-\ell$ ou ℓ.
5. Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors elle est positive à partir d'un certain rang.
6. Si une suite (u_n) converge, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
7. Si une suite (u_n) est telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.
8. Si une suite (u_n) est telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
9. La suite (nu_n) est convergente si et seulement si la suite (u_n) tend vers zéro.
10. Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
11. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
12. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
13. La somme d'une suite divergente et d'une suite divergente est convergente.
14. La somme d'une suite divergente et d'une suite divergente est divergente.
15. Une suite d'entiers converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 27. Montrer que les suites

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

sont adjacentes.

Exercice 28.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq 2ab.$$
2. On fixe $u_0, v_0 > 0$, et on définit par récurrence
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$
On définit également $w_n = u_n - v_n$. Montrer que $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2}$.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. On suppose que $a \leq b$, et on pose $\phi = \arccos(a/b)$. Montrer par récurrence que
$$v_n = \frac{b\sin(\phi)}{2^n \sin(\phi/2^n)} \qquad u_n = v_n \cos(\phi/2^n).$$
En déduire la valeur de la limite commune de ces deux suites. (on pourra admettre que $\sin(x)/x \to 1$ lorsque $x \to 0$.)

Exercice 29. Déterminer les limites suivantes, si elles existent, quand $n \to +\infty$:

$$\frac{(6n^2+1)(3+(-1)^n)}{3n^2+2} \qquad \frac{n!}{n^n} \qquad \frac{\sqrt{3n^2+3}}{\sqrt{2n^2-4}} \qquad \frac{2n^2+3}{n-1} \qquad (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{n+\sqrt{n}+1}{n-3} \qquad \frac{(-1)^n n+\sqrt{n}+1}{n-3} \qquad \frac{n+\cos(n)}{n^2}$$

Exercice 30.

1. Soit la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{9-u_n}{2}$. Montrer que la suite (v_n) de terme général $u_n - 3$ est géométrique. En déduire $\lim(u_n)$.
2. Proposer une méthode pour déterminer la nature de la suite définie par récurrence

$$u_0 = c, u_{n+1} = au_n + b.$$

   Déterminer, en fonction de a, b, c, si cette suite est convergente ou divergente.

Exercice 31.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire que la suite de terme général

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor k\pi \rfloor$$

   converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 32. Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall x \in]-1, 1[, |f(x)| \leq 2|x|$. Montrer soigneusement que $(f(u_n))$ converge vers zéro.

Exercice 33. Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0.
2. Montrer que si (u_n) tend vers u, alors $(|u_n|)$ tend vers $|u|$.
3. Est-il vrai que si $(|u_n|)$ tend vers $|u|$, alors (u_n) tend vers u ou $-u$?

Exercice 34. Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que si (u_n) tend vers un réel positif, alors u_n est positif à partir de certain rang.
2. Montrer que si la suite (nu_n) est convergente, alors u_n converge vers 0.
3. La réciproque de 2. est-elle vraie ?

Exercice 35. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel u.

1. Montrer que si $u \neq 0$, alors $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers 1.
2. Que peut-il se passer si $u = 0$?
3. Supposons que $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $l \neq 0$, alors $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers 1.

Exercice 36. Déterminer les limites (si existe) des suites définies par leur terme général suivantes

$$\frac{\sin(n)}{n} \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{(-1)^n n + \sqrt{n} + 1}{n-3}$$

$$\frac{\sqrt{3n^2+3}}{\sqrt{2n^2-4}} \qquad \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \qquad \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

Exercice 37. Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 38. Soit (u_n) une suite telle que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 39. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor ka \rfloor$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Rappeler un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ pour tout réel x. En déduire un encadrement pour u_n.
3. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 40.

1. Montrer que la suite (a_n) de term général $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que les suites (b_n) et (c_n) de termes généraux respectifs
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
sont convergentes.

Exercice 41. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

1. Étudier la monotonie de (u_n).
2. Montrer que (u_n) converge.
3. En utilisant l'encadrement
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
donner un encadrement de u_n. En déduire la limite de u_n.

Exercice 42. Montrer que les suites suivantes sont ajacentes

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
2. $u_n = \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$
3. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Exercice 43. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. Que constater de la monotonie de (u_n) ?
2. Montrer que deux suites extraites $(a_n) := (u_{2n})$ et $(b_n) := (u_{2n+1})$ de (u_n) sont adjacentes. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 44. Montrer que une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice 45. Soit α un irrationnel. Cet exercice a pour but d'établir que l'ensemble $F := \{\{n\alpha\} | n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \{n\alpha\} \leq \frac{1}{m}$. (Indication : penser au principe de tiroir par exemple.)

2. Soient $a, b \in [0,1]$ deux rationnels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq \{n\alpha\} \leq b$.
3. En déduire que F est dense dans $[0,1]$. (On peut utiliser le fait que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$.)

Exercice 46. Une suite (x_n) est dite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > N, \forall m > M, |x_n - x_m| \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.
2. Vérifier que la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente.
3. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$, alors (u_n) converge.

Exercice 47. Etudier la convergence des suites suivantes et calculer leur limite (si existe)

1. $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
2. $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}$.

Exercice 48. Calculer les limites suivantes (si elles existent) :
$a) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, $b) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $c) \lim\limits_{x\to+\infty} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, $d) \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[2]{x^2+x+1} - (x+1))$ $e) \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - (x+1))$

Exercice 49. On considère la suite de terme général :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + S_n$
2. Démontrer (par récurrence) que pour tout entier k il existe un entier n tel que $S_n \geqslant k$. Conclure.

2.2 Suites extraites

Exercice 50. Soit (u_n) une suite réelle monotone. Montrer que si (u_n) admet une suite extraite convergente, alors (u_n) converge.

Exercice 51. **Exercice 2** Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors (u_n) converge.

Exercice 52. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

3 Continuité

3.1 Premières définitions

Exercice 53. Déterminer les limites des expressions suivantes quand $x \to 0$:

$$1)\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \qquad 2)\ \frac{e^{2x} - 1}{x} \qquad 3)\ (1+x)^{1/x} \qquad 4)\ \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Exercice 54. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+4} - \sqrt{x^2-5x+12} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{2}{\ln x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x-4^x}{2\times 5^x + 17\times 3^x}$$

Exercice 55. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56. Montrer que la fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas continue en 0.

Exercice 57. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et continues en un point $x_* \in I$. Montrer que $f+g$ est continue en x_*.

Exercice 58. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x(x-1)}.$$

Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Et en 1 ?

Exercice 59. Pour chacune des fonctions suivantes, démontrer la continuité sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer s'il en existe un prolongement en 0.

1. $f : x \mapsto \sin x \sin \frac{1}{x}$.
2. $g : x \mapsto \cos x \cos \frac{1}{x}$.

Exercice 60. Montrer que la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, est continue :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Et en -1 ?

Exercice 61. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer que la fonction suivante est bien définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble des points où elle est continue :

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-9} & \text{si } x \geq 3 \\ (x-3)\sin(x) + ax^2 & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

Exercice 62. Déterminer l'ensemble de continuité de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^*$:

$$f : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 63. Trouver

1. une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et discontinue en 0.
2. une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et discontinue sur $\mathbb{R}^*$.
3. (*) une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 64. Les définitions suivantes ressemblent à celle de la continuité d'une fonction f sur un intervalle I. Pouvez-vous décrire ces ensembles de fonctions ?

1. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| < \epsilon)$.
2. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon \geq 0, \exists \delta > 0, (|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq \epsilon)$.
3. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0, (|x - x_*| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq \epsilon)$.

Exercice 65. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(y) = f(x+y).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$.
3. On pose $a = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = an$.
4. Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = ar$.
5. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.

Exercice 66. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue en zéro et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$.
Montrer que f est constante.

Exercice 67. Après avoir montré que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$, étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 68. On note E la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. ($E(\sqrt{2}) = 1$, $E(-\pi) = -4$.)
Étudier la continuité de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2.$$

Exercice 69. Soient f et g deux fonctions réelles, continues sur un ensemble I. Montrer que $\max(f, g)$ est continue sur I.

Exercice 70. Montrer que

1. La fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est pas continue en 0.

Exercice 71. Dans cet exercice, on montrera que la fonction sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

1. En utilisant que $|\sin(x)| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$, montrer que sinus est continue en 0.
2. En utilisant l'identité $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$, montrer que sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 72. Discuter la continuité en chaque point de $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes

1. $$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
2. $$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
3. $$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-3} & x \geq 3 \\ (x-3)\sin(x) & x < 3 \end{cases}$$

Exercice 73. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est périodique et que f admet une limite à $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 74. Soit f une fonction continue en 0 vérifiant que $f(x) = f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 75. (Critère de Cauchy) Soit I un intervalle et $x \in \overline{I}$. Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que quelques soient $x_1, x_2 \in I$ vérifiant que $|x_1 - x| < \delta, |x_2 - x| < \delta$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Exercice 76. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $D_\epsilon := \{x_0 \in [a, b] | \lim_{x \to x_0^+} f - \lim_{x \to x_0^-} f > \epsilon\}$ est fini.

Exercice 77. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = \ell$$

— Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

— Trouver un contre-exemple si f n'est pas supposée continue.

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 78. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| = 1$. Montrer que f est constante.

Exercice 79. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que f est constante.

Exercice 80. Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue. On suppose que

$$\forall x, y \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective (on pourra commencer par déterminer $\{f(0), f(1)\}$.
3. Déterminer f.

Exercice 81. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(0) = f(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

On considère, sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, la fonction $f_n : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. En déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe x tel que $f_n(x) = 0$.

Exercice 82. On considère les fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} -\sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ni f ni g ne sont continues en 0.

2. Montrer que f et g vérifient la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par f ou par g est un intervalle.
3. Montrer que $f+g$ ne vérifie pas la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 83. Soit f une fonction réelle continue sur intervalle I non réduit à un point. On suppose que, pour tout $x \in I \cap \mathbb{Q}$, on a $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 84. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$. (On pourra commencer par faire un dessin).

Exercice 85. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $x \in I$; on suppose que x n'est pas la borne inférieure de I. Montrer que $\lim\limits_{y \to x^-} f(y)$ existe et est inférieure ou égale à $f(x)$. Montrer une propriété similaire pour la limite à droite.
2. Montrer que l'ensemble où f est discontinue est dénombrable.

Exercice 86. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$.

Montrer que f est une bijection. En utilisant la caractérisation séquentielle et Bolzano-Weierstrass, montrer que sa réciproque est continue sur $[f(a), f(b)]$.

Exercice 87. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui tend vers des limites finies lorsque $x \to \pm\infty$. Montrer que f est bornée. Les bornes sont-elles atteintes ?

Exercice 88. Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair a toujours au moins une racine réelle. Est-ce vrai pour les polynômes de degré pair ?

Exercice 89. Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré pair admet un maximum ou bien un minimum finis.

3.3 Suites définies par récurrence

Exercice 90. On considère la fonction suivante, définie sur $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et à valeurs réelles :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}.$$

1. Montrer que f est continue et croissante ; montrer que $f(I) \subset I$.
2. Montrer qu'il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = x$.
3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante : $x_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite est croissante et bornée ; en déduire qu'elle converge vers l'unique solution de $f(x) = x$.

Exercice 91. Étudier la convergence, et le cas échéant déterminer la limite, des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ dans les situations suivantes :

1. $f : x \mapsto -x$
2. $f : x \mapsto x^2$
3. $f : x \mapsto \frac{a}{x}$ avec $u_0 \neq 0$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ avec $u_0 \geq 0$.

Exercice 92. Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $k \in [0,1[$. Soit $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ une application k-contractante :

$$\forall a \leq x \leq y \leq b,\ |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$. En déduire que f admet un unique point fixe c.
2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie. Montrer que si elle converge, sa limite est c.
3. Montrer que la seule valeur d'adhérence possible pour (x_n) est c.
4. En déduire que (x_n) converge.

Exercice 93. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. On considère la fonction suivante, définie sur $I = [\sqrt{a}, a]$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

1. Montrer que f est croissante sur I (on pourra utiliser les règles formelles du calcul de dérivée). En déduire que $f(I) \subset I$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur I. En déduire que, sur tout I, on a $f(x) \leq x$.
3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante : $x_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite est décroissante et bornée ; en déduire qu'elle converge vers l'unique solution de $f(x) = x$.

Exercice 94. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction dérivable, telle que $f' < 1$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. On pourra introduire l'ensemble $E = \{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution.
3. Soit $u_0 \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - c| \leq k|u_n - c|$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 95. Soit $a > 1$ un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Étudier la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sur l'intervalle $[1, a]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.
3. Montrer que $(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{a}{u_n}\right)^2$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{4\sqrt{a}}$ vérifie
$$v_{n+1} \leq v_n^2.$$
4. On pose $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $u_{n_0} - \sqrt{a} < 2\sqrt{a}$. En utilisant la suite (v_n), montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq n_0$ on a
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2^{-2^{n-n_0}} 4\sqrt{a}.$$

Exercice 96. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite défine par $\begin{cases} u_0 \in]0; \dfrac{1}{2}[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $x \mapsto f(x) = x - x^2$. Montrer que f est croissante, puis que l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ est stable par f, c'est-à-dire que l'image de $[0; \frac{1}{2}]$ par f est contenue dans $[0; \frac{1}{2}]$.
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+2}$
3. En déduire la limite de (u_n).

4 Dérivabilité

4.1 Définitions

Exercice 97. Trouver le plus grand intervalle contenant 1 sur lequel la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est une bijection.

Exercice 98. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice 99. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 mais continue en aucun autre point.

Exercice 100. Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \to \ell_0$ quand $x \to 0$ et $xf'(x) \to \ell_1$ quand $x \to 0$. Que dire de ℓ_1 ?

Exercice 101. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Montrer que f est infiniment dérivable, et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)(1 - x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

où P_n est un polynôme de degré n, de terme dominant $n!X^n$.

Exercice 102. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est infiniment dérivable, et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}},$$

où P_n est un polynôme de degré $\max(n - 1, 0)$.

En déduire que toutes les dérivées de f s'annullent en 0.

Exercice 103. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et soit $C > 1$. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{f(Cx) - f(x)}{x}$$

existe. Quel est le lien entre cette limite et $f'(0)$?

Exercice 104. Montrer que la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 105. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que, si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a).$$

L'existence de cette limite entraîne-t-elle, réciproquement, que f est dérivable en a ?

Exercice 106. On cherche à fabriquer des boîtes de conserve de forme cylindrique. Ces boîtes doivent pouvoir contenir 1L (=1000 cm^3). Afin d'optimiser les coûts de production, on veut minimiser la surface totale du cylindre. Quelle doit être la hauteur de la boîte ?

Exercice 107. Soient $A = (x, 0)$, $B = (1, 3)$ et $C = (8, 4)$ trois points du plan euclidien muni d'un repère orthonormé.

Trouver $x \in \mathbb{R}$ de sorte que le périmètre du triangle ABC soit minimal.

4.2 Théorèmes des accroissements finis

Exercice 108. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est constante.

Exercice 109. On veut étudier (à nouveau) les sommes $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'encadrement précédent pour $x = 1$, $x = 2$, jusque $x = n - 1$. En déduire que

$$s_{n-1} < \ln(n) < s_{n-1}.$$

3. En déduire que $\lim s_n = +\infty$, et plus précisément, que $s_n \sim \ln(n)$.

On considére, sur $]0, +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x$. **Exercice 110.**

1. Montrer que f est de classe C^1 et calculer f'. En utilisant le théorème des accroissements finis, en déduire que, pour tout $x > 1$, on a

$$\ln(x - 1) \leq f(x) - f(x - 1) \leq \ln(x).$$

2. Déduire de la question précédente que

$$\ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(n) \geq f(n) - f(1)$$
$$\ln(2) + \ln(3) + \ldots + \ln(n) \leq f(n + 1) - f(2)$$

3. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{e}{4}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \geq n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 111. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique. (On pourra utiliser le théorème de Rolle).

Exercice 112. À l'aide du TAF, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 113. Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 114. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. On suppose que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 115. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $(x-3)^{-2}$. Montrer qu'il n'existe aucun $c \in]1, 4[$ tel que $f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$. Est-ce une contradiction au TAF ?

Exercice 116. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P a k racines réelles. Montrer que P' a au moins $k-1$ racines réelles. (On pourra commencer par le cas où les racines réelles de P sont distinctes).

Exercice 117. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que, quand $x \to +\infty$, on a $f(x) \to \ell_1$ et $f'(x) \to \ell_2$. Montrer que $\ell_2 = 0$. (On pourra appliquer le TAF)

Exercice 118. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y < z$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]y, z[$ tel que $z^x - y^x = x(z-y)c^{x-1}$.
2. Résoudre l'équation $10^x - 7^x - 5^x + 2^x = 0$.

Exercice 119. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = (1-c)f'(c)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0, \pi/2[$ tel que $f(c)\tan(c) = f'(c)$.

Exercice 120. Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur un intervalle I qu'on précisera. On note g sa réciproque.
2. Montrer que g est continue sur I. Où g est-elle dérivable ?
3. Calculer $g'(1 + \pi/2)$.

Exercice 121. On va montrer de trois manières différentes que la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

converge (et déterminer sa limite).

1. Montrer que $u_n = \cos\left(\frac{\text{arccos(u}_0)}{2^n}\right)$. Conclure.
2. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ puis étudier la monotonie de u_n. Conclure.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}2$ est dérivable sur $[0, 1]$, où sa dérivée est bornée par $\sqrt{1}2\sqrt{2}$. En déduire que

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|.$$

Conclure.

5 Développements de Taylor

Exercice 122.

— Montrer que la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0 :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Quelle est la valeur de $f(0)$?

— Donner un développement limité de f à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?

Exercice 123.

— Montrer que la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0 :

$$g : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

Quelle est la valeur de $g(0)$?

— Donner un développement limité de g à l'ordre 1 en 0. En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(0)$?

Exercice 124. On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \sin\left(e^{\frac{1}{|x|}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f admet un développement de Taylor en zéro, à un ordre quelconque.
2. Montrer que f' n'est pas continue en zéro.

Exercice 125. Calculer les limites des expressions suivantes en zéro

$$\frac{e^x-1}{x} \qquad \frac{e^{x^2}-1}{x} \qquad \frac{\sin(x)}{x} \qquad \frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} \qquad \ln(1+x)\ln(e^x-1) \qquad \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{1-x}\sin(x)}.$$

Exercice 126. À l'aide d'un développement limité, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Exercice 127. On considère la fonction réelle suivante :

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2+x^2+x^8}.$$

Donner son polynôme de Taylor d'ordre 6 en zéro.

Exercice 128. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathbb{C}^3$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que les dérivées successives de f en zéro ne s'annullent pas.

1. Donner un équivalent simple, quand $h \to 0$, de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.

2. Donner un équivalent simple, quand $h \to 0$, de $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - f'(a)$.

Exercice 129. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Montrer, en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto e^x$, que $u_n \to e$.
3. On suppose par l'absurde que $e = p/q$ est un rationnel, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $q \cdot q!u_q$ et $q \cdot q!v_q$ sont des entiers consécutifs. En déduire l'absurdité.

Exercice 130. Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles. On suppose que $f(0) = 0$, que $f'(0) > 0$ ainsi que $f''(0) > 0$.

1. Montrer par récurrence sur n que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, déterminer la limite de

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

   On appellera ℓ cette limite.
3. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \ell$.