Analyse réelle
1ère année, semestre 2
TD Feuille 10

Exercice 1. [DM pour le 21/05] On cherche à fabriquer des boîtes de conserve de forme cylindrique. Ces boîtes doivent pouvoir contenir 1L (=1000 cm^3). Afin d'optimiser les coûts de production, on veut minimiser la surface totale du cylindre. Quelle doit être la hauteur de la boîte ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique. (On pourra utiliser le théorème de Rolle).

Exercice 3. À l'aide du TAF, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 4. Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f(0) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. On suppose que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $(x-3)^{-2}$. Montrer qu'il n'existe aucun $c \in]1,4[$ tel que $f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$. Est-ce une contradiction au TAF ?

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P a k racines réelles. Montrer que P' a au moins $k-1$ racines réelles. (On pourra commencer par le cas où les racines réelles de P sont distinctes).

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que, quand $x \to +\infty$, on a $f(x) \to \ell_1$ et $f'(x) \to \ell_2$. Montrer que $\ell_2 = 0$. (On pourra appliquer le TAF)