Analyse réelle
1ère année, semestre 2
TD Feuille 7

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(0) = f(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

On considère, sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, la fonction $f_n : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. En déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe x tel que $f_n(x) = 0$.

Exercice 2. On considère les fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} -\sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ni f ni g ne sont continues en 0.
2. Montrer que f et g vérifient la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par f ou par g est un intervalle.
3. Montrer que $f + g$ ne vérifie pas la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3. (**DM pour le 23/04**) Soit f une fonction réelle continue sur intervalle I non réduit à un point. On suppose que, pour tout $x \in I \cap \mathbb{Q}$, on a $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$. (On pourra commencer par faire un dessin).

Exercice 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $x \in I$; on suppose que x n'est pas la borne inférieure de I. Montrer que $\lim\limits_{y \to x^-} f(y)$ existe et est inférieure ou égale à $f(x)$. Montrer une propriété similaire pour la limite à droite.
2. Montrer que l'ensemble où f est discontinue est dénombrable.

Exercice 6. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$.

Montrer que f est une bijection. En utilisant la caractérisation séquentielle et Bolzano-Weierstrass, montrer que sa réciproque est continue sur $[f(a), f(b)]$.