Analyse réelle
1ère année, semestre 2
TD Feuille 8

Exercice 1. Trouver le plus grand intervalle contenant 1 sur lequel la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est une bijection.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 mais continue en aucun autre point.

Exercice 4. Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \to \ell_0$ quand $x \to 0$ et $xf'(x) \to \ell_1$ quand $x \to 0$. Que dire de ℓ_1 ?

Exercice 5. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Montrer que f est infiniment dérivable, et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)(1 - x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

où P_n est un polynôme de degré n, de terme dominant $n!X^n$.

Exercice 6. **(DM pour le 07/05)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est infiniment dérivable, et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}},$$

où P_n est un polynôme de degré n.

En déduire que toutes les dérivées de f s'annullent en 0.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et soit $C > 1$. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{f(Cx) - f(x)}{x}$$

existe. Quel est le lien entre cette limite et $f'(0)$?

Exercice 8. Montrer que la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que, si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = 2f'(a).$$

L'existence de cette limite entraîne-t-elle, réciproquement, que f est dérivable en a ?