Introduction aux principes d'incertitudes

Alix Deleporte

4 juillet 2019

Table des matières

1 Les principes d'incertitude historiques

Cette section est tirée de [9].

1.1 Heisenberg

Théorème A. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Alors*

$$\|xf\|_{L^2}^2 \|\xi \hat{f}\|_{L^2}^2 \geq \frac{\|f\|_{L^2}^4}{16\pi^2}.$$

L'égalité a lieu seulement si f est une gaussienne.

Bien sûr, le terme de gauche peut être infini. Supposons qu'il est fini. Alors en particulier $xf \in L^2$ et $f' \in L^2$.

Par intégration par parties, on a

$$2Re \int_c^d xf\overline{f'} + \int_c^d |f|^2 = d|f(d)|^2 - c|f(c)|^2.$$

La quantité de gauche converge quand $d \to +\infty$, donc la quantité de droite aussi ; si la limite est non-nulle on a $f \sim Cx^{-\frac{1}{2}}$ en $+\infty$, ce qui n'est pas possible car $f \in L^2$. De même, en $-\infty$ on tend forcément vers zéro, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 = -2\Re \int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}.$$

Ainsi, par Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_2^4 \leq 4 \int x^2 |f(x)|^2 dx \int |f'(x)|^2 \mathrm{d}x = 16\pi^2 \int x^2 |f(x)|^2 \int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2.$$

L'égalité a lieu seulement quand $f' = \lambda xf$ pour un certain λ, donc si f est une gaussienne.

Avec des translations en espace et en fréquence, on peut montrer que f et $\hat{f}$ ne peuvent pas avoir en même temps une variance trop petite par rapport à n'importe quel point.

On aimerait pouvoir appliquer ce résultat directement en théorie du signal : si un signal ne contient pas trop de fréquences élevées, et qu'on le connaît sur un certain intervalle de temps, peut-on le reconstruire sur les autres intervalles ? Malheureusement ce n'est pas une conséquence immédiate du principe d'incertitude. En pratique le signal f est à valeurs réelles, ce qui signifie que sa transformée de Fourier est symétrique : $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Or l'inégalité de Heisenberg n'invalide pas des situations où f est très concentrée autour d'un point, et $\hat{f}$ est très concentrée autour de deux points !

Il faut donc montrer des principes d'incertitude locaux :

Théorème B. *[23, 22, 21] Soit $\alpha < \frac{1}{2}$. Il existe une constante K_α telle que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, et pour tout borélien E, on ait*

$$\int_E |\hat{f}|^2 \leq K_\alpha |E|^{2\alpha} \| |x|^\alpha f\|_{L^2}^2.$$

De même, si $\alpha > \frac{1}{2}$, il existe K_α telle que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout borélien E< on ait

$$\int_E |\hat{(f)}|^2 \leq K_\alpha \|f\|_{L^2}^{2-\frac{1}{\alpha}} \| |x|^\alpha f\|_{L^2}.$$

On voudrait en fait des principes « microlocaux » : à la fois locaux en espace et en fréquence. Par exemple, si la fonction f est à support dans un compact K, on a facilement

$$\int_E |\hat{f}|^2 \leq |E| \|\hat{f}\|_\infty^2 = |E| \|f\|_1^2 \leq |E||K| \|f\|_2^2.$$

C'est grossier, mais on voit apparaître le produit des volumes de E et de K. En dimension supérieure, ces principes se généralisent, et on voit apparaître la capacité symplectique (cf l'exposé de M de Gosson). Par exemple, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on peut construire une matrice de covariance de la façon suivante. Il y a quatre blocs, le bloc en haut à gauche a pour entrées $\int x_i x_j |f(x)|^2 \mathrm{d}x$, le bloc en bas à droite a pour entrées $\int \xi_i \xi_j |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \frac{4}{\pi^2} \int \overline{\partial_i f} \partial_j f$, et le bloc en haut à droite a pour entrées $i\frac{2}{\pi} Re \int x_i \overline{f} \partial_j f$.

C'est une matrice symétrique réelle.

Théorème C. *Cette matrice est définie positive. Son ellipsoïde associé a une capacité d'au moins π.*

1.2 Hardy

C'est l'autre type de principe d'incertitude ; on s'attache au taux de décroissance en l'infini d'une fonction et de sa transformée de Fourier.

Théorème D. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est non nulle, $C > 0$, $N \geq 0$ et $a, b > 0$ sont tels que*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^N e^{-a\pi x^2}$$
$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N e^{-b\pi \xi^2},$$

alors $ab \leq 1$. De plus, si $ab = 1$, alors $f(x) = P(x) e^{-a\pi x^2}$ pour un certain polynôme P de degré au plus N.

Je ne prouverai pas ce résultat maintenant. Il utilise le théorème de Phragmén-Lindelöf sur la croissance en l'infini de fonctions holomorphes.

2 Prolongement unique elliptique

Dans ces résultats on retrouve la philosophie du principe d'incertitude. Si une fonction vérifie une certaine équation elliptique, alors elle est contrôlée en fréquence, donc elle doit avoir une certaine étendue spatiale.

2.1 Inégalités de type Remez

L'opérateur elliptique le plus simple est ∂^k. Les éléments de son noyau sont les polynômes de degré jusque $k-1$; leur transformée de Fourier distributionnelle est supportée en zéro. De ce point de vue il est naturel que la connaissance d'un polynôme sur un ouvert détermine ce polynôme partout ailleurs.

Une version quantifiée est la suivante :

Théorème E. *Soit P un polynôme de degré n, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné et $E \subset J$ un borélien. Alors*

$$\sup_{x\in J} |p(x)| \leq \left(\frac{4|J|}{|E|}\right)^n \sup_{x\in E} |p(x)|.$$

Il y a un certain nombre d'extensions de ce résultat, par exemple des versions avec des sommes finies d'exponentielles complexes (Nazarov-Turan), et des versions en dimension plus grande : [10, 11, 13, 20]

Des résultats de ce type existent pour des valeurs propres de laplacien plus générales.

Théorème F. *[16] Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, et $\omega \subset \Omega$ un plus petit ouvert. On note ϕ_j les fonctions propres du Laplacien de Dirichlet sur Ω, avec valeurs propres μ_j. Alors il existe $K > 0$ tel que, pour toute suite (α_j), on ait*

$$\| \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \phi_j \|^2_{L^2(\Omega)} \leq K e^{K\sqrt{\mu}} \| \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \phi_j \|^2_{L^2}.$$

La constante K dépend de ω, on a des bornes. Par exemple, dans [25], on prouve que le facteur dans l'exponentielle peut être choisi comme $O(-\log(|\omega|)$, donc $e^{K\sqrt{\mu}} \simeq |\omega|^{-C\sqrt{\mu}}$.

A contrario, dans [19], on montre que le facteur dans l'exponentielle est au moins $\frac{1}{2}\sum_{y\in\partial\Omega} \mathrm{dist}(y,\omega)$.

On sait aussi contrôler les normes L^p.

2.2 TF à support compact

Une autre voie de généralisation consiste à examiner le taux de décroissance maximal possible d'une fonction dont la tranformée de Fourier est à support dans un compact donné.

Théorème G. *[12] Pour toute fonction* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *non identiquement nulle, à support compact, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(|\hat{f}(\xi)|)}{1+|\xi|^2} \mathrm{d}\xi > -\infty.$$

Donc par exemple la transformée de Fourier ne peut pas décroître aussi vite que $\exp(-|x|/\log|x|)$.

Une 'réciproque" de ce résultat est le principe des multiplicateurs de Beurling-Malliavin :

Théorème H. *Soit* ω *une fonction Lipschitzienne, positive et bornée sur* $\mathbb{R}$*, avec*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|log\omega(\xi)|}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Alors il existe une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$*, non nulle, à support compact, et une constante* $c > 0$ *telle que* $|\hat{\psi}| \leq \omega^c$*.*

Encore une fois la plupart des preuves de ce résultat passent par l'analyse complexe, une tendance récente [17] consiste à "décomplexifier" ces preuves.

2.3 Principe de Meshkov

Quelle est la décroissance maximale possible d'une fonction propre d'un opérateur de Schrodinger ? Si le potentiel tend très vite vers l'infini, la fonction peut être très petite. Par contre :

Théorème I. *[1, 18] Si* $\Delta u = Vu$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *avec* V *et* u *bornées, et* $u(0) = 1$*, alors pour tout* x_0 *avec* $|x_0| \geq 1$*, on a*

$$\max_{|x-x_0|\leq 1} |u(x)| > c \exp(-c(\log|x_0|)|x_0|^{4/3}).$$

Ce résultat est utilisé par Bourgain et Kenig pour démontrer des résultats sur le modèle d'Anderson ; en fait, un principe d'incertitude avait déjà été utilisé par Shubin, Vakilian et Wolff avec la même application en tête ; je consacrerai une séance à ces principes d'incertitudes fractals.

La méthode de démonstration passe par des *estimées de Carleman* qui sont très importantes en théorie du contrôle. Si u est dans le noyau d'un certain opérateur P, alors on prend ϕ bien choisie et on regarde $e^{-\phi}Pe^{\phi}$, qui vérifie lui-même des propriétés d'ellipticité ou d'hypoellipticité.

3 Contrôlabilité quantifiée

3.1 Cas parabolique

Le principe d'incertitude de Hardy est en fait *équivalent* au principe suivant :

Théorème J. *Si* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \neq 0$, $\alpha > 0, \beta > 0, C > 0$, *et que* $u(x,T)$ *dénote la solution du problème de Cauchy :*

$$i\partial_t u = \Delta u$$
$$u(t=0) = u_0,$$

Alors si $|u_0(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|^2/2}$ *et* $|u(x,T)| \leq Ce^{-\beta|x|^2/2}$, *nécessairement* $\alpha\beta \geq T$. *Si l'égalité est réalisée, alors* u_0 *est une gaussienne.*

Une piste suivie par [7, 8, 3, 6, 5, 14, 4] et [2], qui rappelle les travaux de Meshkov, consiste à rajouter un potentiel dont la croissance est maîtrisée, et éventuellement un champ magnétique ; alors on a le même type de résultat (avec une décroissance gaussienne).

Dans les deux cas, les estimées sont sharp pour des potentiels *complexes*, on ne sait pas si c'est vrai pour des potentiels réels.

Ce qui est intéressant, c'est qu'on contrôle la solution de l'équation par sa donnée au même endroit en plusieurs temps.

De manière plus générale on peut regarder la contrôlabilité d'autres équations paraboliques sur des petits ouverts en espace croix $[0,T]$. Par exemple Le Rousseau-Moyano pour l'équation de Kolmogorov, avec encore une fois des outils à la Carleman.

3.2 Cas hyperbolique

De même que précédemment, le principe d'incertitude de Hardy a une reformulation en terme d'équation des ondes.

Dans les équations hyperboliques on a vitesse finie de propagation ; la question de savoir si on peut contrôler la solution dans un ouvert en espace croix $[0,T]$ ne se pose donc que si l'onde a le temps de se propager jusque-là.

Examinons le cas le plus simple de l'équation des ondes sur une variété Riemannienne M, et la nulle contrôlabilité. On prend un ouvert Ω, ou carrément une hypersurface S. Peut-on contrôler une solution de l'équation des ondes sur $M \times [0,T]$ par la donnée sur $\Omega \times [0,T]$ ou $S \times [0,T]$: si c'est zéro sur le dernier, est-ce zéro partout ?

Quand M est analytique, on a un résultat de Holmgren. Il a fallu attendre [24] pour le cas lisse, avec des opérateurs qui sont plus généraux que l'équation des ondes.

La version finale quantifiée a été obtenue par [15] :

$$\|(u_0,u_1)\|_{H^1\times L^2} \leq Ce^{C\Lambda}\|\partial_\nu u\|_{L^2(]0,T[\times S)},$$

où

$$\Lambda = \frac{\|(u_0,u_1)\|_{H^1\times L^2}}{\|(u_0,u_1)\|_{L^2\times H^{-1}}}$$

est la *fréquence typique* de la donnée initiale. Cette fréquence typique est elle-même bornée inférieurement :

$$\Lambda \geq C \log\left(\frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_1 \times L^2}}{\|\partial_\nu u\|_{L^2 \times (]0,T[\times S)}} + 1\right).$$

3.3 Contrôle et incertitude

Les outils de contrôlabilité sont utilisés dans des schémas numériques pour améliorer la connaissance de la solution d'une équation. Un exemple en dimension finie est le filtre de Kalman, utilisé dans les GPS, les fusées etc. On peut mesurer certaines des variables à certains moments, et on en déduit assez précisément le comportement de la solution alors qu'on n'a pas accès à d'autres variables.

Références

[1] J. Bourgain and C. E. Kenig. On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. *Inventiones mathematicae*, 161(2) :389–426, 2005.

[2] B. Cassano and L. Fanelli. Sharp Hardy uncertainty principle and gaussian profiles of covariant Schrödinger evolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(3) :2213–2233, 2015.

[3] M. Cowling, L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. The Hardy uncertainty principle revisited. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 2007–2025, 2010.

[4] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Convexity properties of solutions to the free Schr$\backslash$" odinger equation with Gaussian decay. *arXiv preprint arXiv :0710.2144*, 2007.

[5] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Hardy's Uncertainty Principle, Convexity and Schr$\backslash$" odinger Evolutions. *arXiv preprint arXiv :0802.1608*, 2008.

[6] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Uncertainty principle of Morgan type and Schrödinger evolutions. *Journal of the London Mathematical Society*, 83(1) :187–207, 2010.

[7] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Hardy uncertainty principle, convexity and parabolic evolutions. *Communications in Mathematical Physics*, 346(2) :667–678, 2016.

[8] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, and others. The sharp Hardy uncertainty principle for Schrödinger evolutions. *Duke Mathematical Journal*, 155(1) :163–187, 2010.

[9] C. L. Fefferman. The uncertainty principle. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 9(2) :129–206, 1983.

[10] N. Fontes-Merz. A multidimensional version of Turán's lemma. *Journal of Approximation Theory*, 140(1) :27–30, 2006.

[11] M. I. Ganzburg. Polynomial inequalities on measurable sets and their applications. *Constructive approximation*, 17(2) :275–306, 2001.

[12] V. Havin and B. Jöricke. *The uncertainty principle in harmonic analysis*, volume 28. Springer Science & Business Media, 2012.

[13] V. P. Havin and N. K. Nikolski. Complex Analysis, Operator Theory and Related Topics : The SA Vinogradov Memorial Volume. *St Petersburg Mathematical Journal*, 14(4) :229–237, 2003.

[14] C. Kenig. Quantitative unique continuation, logarithmic convexity of Gaussian means and Hardy's uncertainty principle. In *Proc. Sympos. Pure Math*, volume 79, pages 207–227, 2008.

[15] C. Laurent and M. Léautaud. Quantitative unique continuation for operators with partially analytic coefficients. Application to approximate control for waves. *arXiv preprint arXiv :1506.04254*, 2015.

[16] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18(3) :712–747, 2012.

[17] J. Mashreghi, F. Nazarov, and V. Havin. Beurling–Malliavin multiplier theorem : the seventh proof. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 17(5) :699–744, 2006.

[18] V. Z. Meshkov. On the possible rate of decay at infinity of solutions of second order partial differential equations. *Sbornik : Mathematics*, 72(2) :343–361, 1992.

[19] L. Miller. Unique continuation estimates for sums of semiclassical eigenfunctions and null-controllability from cones. 2008.

[20] F. L. Nazarov. Local estimates of exponential polynomials and their applications to inequalities of uncertainty priciple type. *St Petersburg Mathematical Journal*, 5(4) :663–718, 1994.

[21] J. F. Price. Inequalities and local uncertainty principles. *Journal of Mathematical Physics*, 24(7) :1711–1714, 1983.

[22] J. F. Price. Sharp local uncertainty inequalities. *Studia Math*, 85 :37–45, 1987.

[23] J. F. Price and A. Sitaram. Local uncertainty inequalities for locally compact groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 308(1) :105–114, 1988.

[24] D. Tataru. Unique continuation for solutions to PDE's ; between Hormander's theorem and Holmgren's theorem. *Communications in partial differential equations*, 20(5-6) :855–884, 1995.

[25] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. On the null-controllability of diffusion equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 17(4) :1088–1100, 2011.