Principes d'incertitude fractaux

Alix Deleporte

4 juillet 2019

Table des matières

1 Principe d'incertitude fractal d'après Shubin

On commence par définir les ensembles qu'on va utiliser.

Soit $\rho : x \mapsto \min(1, |x|^{-1})$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit *ϵ-fin* lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|E \cap D(x, \rho(x))| \leq \epsilon |D(x, \rho(x))|.$$

Les ensembles fins peuvent ne pas être fractaux au sens propre, mais la précision avec laquelle ils sont fractaux augmente avec la distance à l'origine.

Théorème A. *[2] Il existe $\epsilon > 0$ et $C < \infty$ tels que, si E et F sont ϵ-fins, on a, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^2(E^c)} + \|\hat{f}\|_{L^2(F^c)}).$$

Le reste de cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Il utilise uniquement des outils d'analyse réelle.

On choisit une fonction test $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $0 \leq \hat{\phi} \leq 1$, *supp*$\hat{\phi} \subset D(0, 2)$ and $\hat{\phi} = 1$ sur $D(0, 1)$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\phi_j : x \mapsto 2^{jn} \phi(2^j x),$$

de sorte que $\|\phi_j\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$ et $\hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(2^{-j}\xi)$.

Maintenant on pose $\psi_0 = \hat{\phi}$ et $\psi_j = \hat{\phi}_j - \hat{\phi}_{j-1}$, de sorte que ψ est supportée dans $D(0, 2^{j+1}) \setminus D(0, 2^j)$, et $\sum \psi_j = 1$.

Les opérateurs de troncature qu'on introduit maintenant sont

$$S_N f = \sum_{j=0}^{N} \psi_j (\phi_j * f)$$

$$T_N f = \sum_{j=0}^{N} \psi_j (f - \phi_j * f).$$

En n'importe quel point il n'y a pas plus que trois des fonctions ψ_j qui sont non-nulles, et $\phi_j * f$ est très proche de f quand j est grand, donc au moins si $f \in \mathcal{S}$, on a $T_N f$ et $S_N f$ qui convergent dans la topologie de $\mathcal{S}$. On appelle S et T les opérateurs limites. Alors $S + T = I$ pour des fonctions dans $\mathcal{S}$.

On va montrer que les opérateurs limites ont un sens dans L^2.

S_N est l'opérateur à noyau

$$S_N(x, y) = \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) \phi_j(x - y).$$

Pour montrer que l'opérateur limite est borné de L^2 dans L^2, il suffit de montrer que $\|S_N(x,y)\|_{L^\infty L^1}$ est bornée et de même en échangeant les variables (Test de Schur).

On regarde d'abord $\int |S_N(x,y)|\mathrm{d}y$. Pour x fixé il n'y a que trois valeurs de j différentes pour lesquelles $\psi_j(x)$ est non-nulle, donc

$$\int |S_N(x,y)|\mathrm{d}y \leq 3 \sup_j \int |\psi_j(x)\phi_j(x-y)|\mathrm{d}y \leq 3\|\psi\|_\infty \|\phi\|_1.$$

La deuxième intégrale est plus astucieuse. $\phi \in \mathcal{S}$ donc par exemple

$$|\phi_j(x-y)| \leq C 2^{jn}(1+2^j|x-y|)^{-3n}.$$

Pour tout y, il y a au plus trois valeurs de j pour lesquelles $\mathrm{dist}(y, supp(\psi_j)) < 1$. En les isolant, on a

$$\int |S_N(x,y)|\mathrm{d}x \leq 3\|\phi\|_1 + \int \sum |\psi_j(x)| 2^{jn}(1+2^j|x-y|)^{-3n}\mathrm{d}x.$$

On a contrôlé par la somme d'une série géométrique.

On va montrer maintenant, indépendamment de N, que

$$\int_E |S_N(x,y)|\mathrm{d}y \leq C\epsilon.$$

On fixe x et on prend j tel que $\psi_j(x) \neq 0$. Il suffit alors de prouver que $\int_E |\phi_j(x-y)|\mathrm{d}y \leq C\epsilon$.

2^j est environ égal à $\rho(x)^{-1}$. Autrement dit, on peut remplacer l'estimée précédente sur ϕ_j par

$$|\phi_j(x-y)| \leq C\rho(x)^{-n}(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)})^{-2n}.$$

Or, $(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)})^{-2n} \geq 2^{-2nk}$ si et seulement si $y \in D(x, 2^k\rho(x))$. Ainsi,

$$\int_E |\phi_j(x-y)|\mathrm{d}y \leq C\rho(x)^{-n}\sum_k 2^{-2nk}|E \cap D(x,2^k\rho(x))| \leq \rho(x)^{-n}\epsilon \sum_k 2^{-2nk}\rho(x)^n 2^{nk}.$$

Pour T_N c'est la même chose une fois qu'on a conjugué en Fourier.

Donc S et T sont bornés de L^2 dans L^2, et de plus,

$$\|S\chi_E f\|_{L^2}^2 \leq \epsilon C\|f\|_{L^2}^2$$

et de même

$$\|\chi F\widehat{Tf}\|_{L^2}^2 \leq \epsilon C\|f\|_{L^2}^2.$$

Ainsi,

$$\hat{f} = \widehat{S(\chi_{E^c}f)} + \widehat{S(\chi_E f)} + \chi_{F^c}\widehat{Tf} + \chi_F\widehat{Tf},$$

donc

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \|\chi_{E^c}f\|^2 + \|\chi_{F^c}\hat{f}\|^2 + C\epsilon\|f\|_{L^2}^2.$$

2 Principe d'incertitude fractal d'après Bourgain et Dyatlov

Dans cette section on démontre un principe d'incertitude fractal utilisé dans [1].

2.1 Théorème de Beurling-Malliavin

On commence par parler de la transformée de Hilbert et de l'espace de Hardy.

Definition 2.1. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$H(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(-i(sgn\xi)\hat{f}(\xi)).$$

C'est un opérateur de multiplication en Fourier par $-isgn\xi$, qui est une fonction bornée. On a donc immédiatement $\|Hf\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$.

Par ailleurs, $sgn(\xi)^2 = 1$, donc $H(H(f)) = f$ pour tout f.

La transformée de Hardy commute avec les translations (qui sont aussi des multiplications en Fourier) et avec les dilatations.

Si $f \in C_0^\infty$ alors $Hf \in C^\infty$, et on a $H(f') = (H(f))'$.

On a la représentation intégrale suivante :

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{f(x-t)}{t} \mathrm{d}t.$$

A ϵ fixé, pour que l'intégrale converge il faut $f/(1+|x|) \in L^1(\mathbb{R})$.

La limite quand $\epsilon \to 0$ a alors un sens quelque soit f comme précédemment. C'est difficile, et c'est du à Marcel Riesz.

On généralise cette transformée en des fonctions qui croissent plus vite en l'infini, en annulant la contribution de t^{-1} en l'infini :

$$\tilde{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|t| \geq \epsilon} f(t) \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) \mathrm{d}t.$$

Alors si $f/(1+|x|) \in L^1$, $\tilde{H}(f) = H(f) + c(f)$ avec

$$c(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{tf(t)}{t^2+1}.$$

Mais maintenant ça fait sens pour f tel que $f/(1+|x|)^2 \in L^1$, en particulier pour f constante. Comme l'intégrale c associée à une constante est nulle,on retrouve $\tilde{H}\tilde{H}f = -f + c(Hf)$ au moins pour $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2. *On définit*

$$\mathcal{L}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\log \omega(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Soit $0 \leq \omega \in L^2$ *tel que* $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$. *Alors il existe* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *tel que* $supp\hat{f} \subset \mathbb{R}^+$ *et* $|f| = \omega$.

Preuve. Par définition, si $\Omega = -\log \omega$, alors $\Omega/(1+|x|)^2 \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\tilde{H}\Omega = \tilde{\Omega}$ est bien définie.

Posons $f = e^{-(\Omega + i\tilde{\Omega})}$. Alors $|f| = \omega$ donc $f \in L^2$. Il faut montrer que f est dans l'espace de Hardy, donc que $Hf = -if$.

La régularisation commute avec la transformée de Hilbert, car c'est une multiplication en Fourier ; elle préserve aussi l'espace de Hardy. Donc si Ω_ϵ approche Ω, alors $\tilde{\Omega}_\epsilon$ approche $\tilde{\Omega}$, à une constante (réelle) près c_0.

De plus,

$$\tilde{H}(\Omega_\epsilon + i\tilde{\Omega}_\epsilon) = \tilde{\Omega}_\epsilon + i\Omega_\epsilon - ic_1$$

où c_1 est une constante réelle. Comme $\tilde{H}(c_1) = 0$, on en déduit

$$\tilde{H}(\Omega_\epsilon + i\tilde{\Omega}_\epsilon + c_1) = -i(\Omega_\epsilon + i\tilde{\Omega}_\epsilon + c_1).$$

Appelons $g_\epsilon = \Omega_\epsilon + i\tilde{\Omega}_\epsilon + c_1$. On va montrer $supp \hat{g}_\epsilon \subset [0, +\infty)$, au sens des distributions.

Soit $\hat{\phi}$ une fonction test telle que $supp\hat{\phi} \subset [-R, -c]$. Étudions la distribution produit $\hat{g}_\epsilon\hat{\phi}$ en utilisant les propriétés de la transformée de Hilbert.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\hat{g}_\epsilon \mathcal{F}(H\phi))(x) &= \lim_{\eta \to 0} \iint_{|y-t| \geq \eta} g_\epsilon(x-y)\phi(t)\frac{1}{y-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\eta \to 0} \iint_{|x-y-t| \geq \eta} g_\epsilon(y)\phi(t)\frac{1}{x-y-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\eta \to 0} \iint_{|x-y| \geq \eta} g_\epsilon(y)\phi(t-y)\frac{1}{x-y}\mathrm{d}t\mathrm{d}y \\
&= \mathcal{F}(\mathcal{F}(\tilde{H}\hat{g}_\epsilon)\hat{\phi})(x) + \lim_{\eta \to 0} \iint_{|x-y| \geq \eta} g_\epsilon(y)\phi(t-y)\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}t\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Comme $H\phi = i\phi$ et $\tilde{H}g_\epsilon = -ig_\epsilon$, et que le terme supplémentaire dans la dernière ligne est une constante, on en déduit que la fonction $\mathcal{F}(\hat{g}_\epsilon\hat{\phi})$ est constante. Autrement dit, $\hat{g}_\epsilon\hat{\phi}$ est une masse de Dirac en zéro, pour toute fonction test $\hat{\phi}$ dont le support est dans $]-\infty, 0[$.

Ainsi, en décomposant $\hat{\phi} = \hat{\phi}_1\hat{\phi}_2$ en produit de deux fonctions dont le support est dans $]-\infty, 0[$, on obtient que $\hat{g}\hat{\phi} = 0$, ce qui permet de conclure.

A ce stade, on dispose d'une fonction lisse g_ϵ dont la transformée de Fourier (au sens des distributions) est supportée dans $\mathbb{R}^+$.

Par convolution, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, la fonction lisse g_ϵ^K jouit des mêmes propriétés. Comme de plus la somme associée converge, on a que $f_\epsilon = \exp(g_\epsilon)$ est telle que $\hat{f}_\epsilon$ est supportée sur $\mathbb{R}^+$.

Or $f_\epsilon = e^{\Omega_\epsilon}e^{i\tilde{\Omega}_\epsilon}e^{c_1(\epsilon)}$.

On peut enlever la constante (qui ne modifie pas le support), et $e^{\Omega_\epsilon} \to e^{\Omega}$ dans L^2, par convergence dominée ; pour la même raison $e^{i(\tilde{\Omega}_\epsilon - c_0(\epsilon))}$ converge uniformément sur les compacts vers $e^{i\tilde{\Omega}}$. Ceci permet de conclure. $\square$

En fait, on a quelque chose de beaucoup plus fort : la fonction f dans l'énoncé, dont on vient de construire un exemple, est unique à constante multiplicative près ; et toute fonction dans l'espace de Hardy s'exprime de cette manière.

De manière plus générale, on peut relaxer l'hypothèse $e^{\Omega} \in L^2$ et on appelle "fonction de sortie" une fonction de la forme $\exp(\Omega + i\tilde{H}(\Omega))$ lorsque $\Omega/(1+x^2) \in L^1$.

La dernière étape qui mène à Beurling-Malliavin est alors

Lemme 2.3. *Soit* $\omega = e^{-\Omega} \in L^2$ *avec* $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$.

On suppose que $\omega^2 e^{2i\pi\sigma x}$ *est une fonction de sortie. Alors il existe* $\psi \in L^2$, *avec* $supp\, \psi \subset [0, \sigma]$ *et* $|\hat{\psi}| = \omega$.

Preuve. Comme précédemment on prend $f \in H^2$ avec $|f| = \omega$. Alors f^2 est une fonction de sortie (définie par 2Ω), avec $|f^2| = \omega^2$. Or $\omega^2 e^{2i\pi\sigma x}$ jouit des mêmes propriétés. Donc $f^2 = e^{i\theta}\omega^2 e^{2i\pi\sigma x}$, autrement dit, $f = e^{i\theta}\overline{f} e^{2i\pi\sigma x}$. Donc $\overline{f} e^{2i\pi\sigma x} \in H^2$, donc *supp* $\hat{f} \subset]-\infty, \sigma]$. Mais $f \in H^2$, donc *supp* $\hat{f} \subset [0, \sigma]$.

Finalement on prend $\psi = \hat{f}$. □

On peut maintenant énoncer et démontrer Beurling-Malliavin

Théorème B. *On prend* $0 \le \omega \le 1$ *avec* $\mathcal{L} > -\infty$ *et*

$$\|(\tilde{H}\Omega)'\|_{L^\infty} \le \frac{\pi}{2}\sigma$$

avec sigma $< 0,1$. *Alors il existe* $\psi \in L^2$, *avec* $supp\, \psi \subset [0, \sigma]$ *et* $|\hat{\psi}| \le \omega$, *ainsi que*

$$\|\hat{\psi}\|_{L^2[-1,1]} \ge \frac{\sigma^6}{600000} \min(\|\omega\|_{L^2(0.5,1)}, \|\omega\|_{L^2(-1,-0.5)}.$$

Preuve. On va trouver $\tilde{\omega} \le \omega$ qui satisfait les conditions du lemme précédent. Pour que $\tilde{\omega}^2 e^{2i\pi\sigma x}$ soit une fonction de sortie, il est nécessaire et suffisant que

$$\tilde{H}(2\log(\omega)) = 2\pi\sigma x + c \mod 2\pi,$$

autrement dit,

$$\tilde{H}(\log(\tilde{\omega}/\omega)) = \pi\sigma x + c - \tilde{H}(\log \omega) \mod \pi.$$

En chaque point on prend le "bon" multiple de π de sorte que le terme de droite soit dans $[-\pi/2, \pi/2[$. Cela définit une fonction bornée s et $\tilde{H}(s)$ est elle-même bornée (car on intègre une fonction qui oscille...).

Ensuite, comme s est Lipschitz on peut borner explicitement. □

2.2 Le principe d'incertitude fractal

Les ensembles fractaux utilisés ici sont les suivants :

Definition 2.4. Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide, $0 \leq \delta \leq 1, C_R \geq 1, 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \infty$.

Alors X est $(\delta, C_R, \alpha_0, \alpha_1)$-régulier, en fait δ-régulier avec constante C_R, sur les échelles de α_0 à α_1, s'il existe une mesure positive μ_X sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. μ_X est supportée sur X (la mesure du complémentaire est nulle.
2. Pour tout intervalle I de taille comprise entre α_0 et α_1, on a $\mu_X(I) \leq C_R|I|^\delta$.
3. Si de plus I est centré en un point de X, $\mu_X(I) \geq C_R^{-1}|I|^\delta$.

Par exemple, les ensembles de Cantor sont réguliers avec un δ qui correspond à leur dimension, et $\alpha_0 = 0$. Si on stoppe la procédure de récurrence qui mène à un Cantor, on obtient un ensemble régulier avec $\alpha_0 > 0$.

La constante α_1 n'est pas très importante, quitte à augmenter C_R on peut augmenter α_1.

Les ensembles réguliers se comportent bien vis-à-vis des transformations Lipschitz, des intersections avec un intervalle, ou du découpage en ensembles réguliers plus petits.

Théorème C. *On fixe $0 \leq \delta < 1, C_R \geq 1, N \geq 1$. Soit X et Y deux fermés de $\mathbb{R}$ tq $X \subset [-1, 1]$ est $(\delta, C_R, N^{-1}, 1)$-rég et $Y \subset [-N, N]$ est $(\delta, C_R, 1, N)$-rég.*

Alors il existe $\beta \geq 0$ et C qui ne dépendent que de δ, C_R tq, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$supp\hat{f} \subset Y \Rightarrow \|f\|_{L^2(X)} \leq CN^{-\beta}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

La première étape est de construire une fonction Lipschitz ω sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \omega(\xi) \leq \exp(-(1 + \xi^2)^{1/4})$$

et

$$\forall \xi \in Y, |\xi| \geq 10, \omega(\xi) \leq \exp(-\log|\xi|^{-\frac{1+\delta}{2}}|\xi|).$$

Alors en appliquant Beuglingh-Malliavin, on obtient une fonction à support compact dont la TF est assez petite sur Y :

Lemme 2.5. *Si $Y \in [-\alpha_1, \alpha_1]$ est $(\delta, C_R, 2, \alpha_1)$-rég, et $c_1 > 0$, alors il existe $c_2(\delta, C_R, c_1)$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $[-c_1, c_1]$, telle que $\|\hat{\psi}\|_{L^2([-1.1])} \geq c_2$, et*

$$\forall \xi \in Y, |\xi| \geq 10, |\hat{\psi}(\xi)| \leq \exp(-\log|\xi|^{-\frac{1+\delta}{2}}|\xi|),$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{\psi}(\xi)| \leq \exp(-c_2\langle\xi\rangle^{1/2}).$$

Preuve. On va construire un multiplicateur de Beurling-Malliavin adapté.

Soit $A_n = [-2^{n+1}, -2^n] \cup [2^n, 2^{n+1}]$. On pose $\rho_n = n^{-\frac{1+\delta}{2}} 2^n \geq 2$. Alors on peut inclure $Y \cap A_n$ dans des intervalles de taille ρ_n, qui sont en nombre plus petit que $Cn^{\frac{\delta(1-\delta)}{2}}$. On note $\mathcal{J}_n$ leur union.

On pose une fonction de cutoff χ, à support dans $[-1, 1]$ et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et si J est un intervalle fermé on note χ_J la fonction de cutoff adaptée à J, multipliée par $|J|$. Alors $0 \leq \chi_J \leq |J|$ et χ_J est Lipschitz avec constante indépendante de J, de plus $\chi_J = |J|$ sur J.

On pose alors

$$\omega(\xi) = \exp(-(1+\xi^2)^{1/4}) \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{J \in \mathcal{J}_n} \exp(-10\chi_J).$$

Alors, en un point de $\xi \in Y$ (qui appartient à l'un des J_n), on a $n \geq C|\xi|$ donc $\rho_n \geq C(\log|\xi|)^{-\frac{1+\delta}{2}}|\xi|$, donc ω est petite sur Y comme demandé.

Il reste à vérifier que $\int \dfrac{\log(\omega)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi \geq -\infty$, et que ω est Lipschitz.

Les intervalles J sont disjoints, donc chaque ξ n'appartient au plus qu'au support de trois fonctions χ_j (il faut faire attention aux bords de A_n, donc la somme des χ_J est Lipschitz.

Pour calculer l'intégrale, on minore par

$$-C \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{\delta(1-\delta)}{2}} \rho_n 2^{-2n},$$

qui est plus grand que

$$-C \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{-(1-\delta)^2}{2}} 2^{-n},$$

qui converge.

Donc on peut utiliser Beurling-Malliavin. □

Le second ingrédient est directement un principe d'incertitude, pour contrôler les fonctions à TF à support compact sur des unions de petits invervalles.

Lemme 2.6. *Soit $\mathcal{I}$ une collection d'intervalles disjoints, tous de taille 1. Pour chacun de ces intervalles I on choisit $I'' \subset I$ un sous-intervalle de taille c_0 indépendante de I.*

Alors il existe C qui ne dépend que de c_0, tel que pour tout $0 < r < 1$, pour tout $0 < \kappa < e^{-C/r}$, pour tout $f \in L^2\mathbb{R}$ avec $\hat{f}$ à support compact, on a :

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \|f\|^2_{L^2(I)} \leq \frac{C}{r} \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} \|f\|^2_{L^2(I'')} \right)^{\kappa} \|e^{2\pi r|\xi|} \hat{f}(\xi)\|^{2(1-\kappa)}_{L^2}.$$

Démonstration. La première remarque est qu'on contrôle directement $\sum_{I\in\mathcal{I}} \|f\|^2_{L^2(I'')}$ par $\|e^{2\pi r|\xi|}\hat{f}(\xi)\|_{L^2}$, donc il suffit d'estimer la norme L^2 sur $I \setminus I''$.

Comme $\hat{f}$ est à support compact, f a une extension holomorphe F à tout $\mathbb{C}$ (donnée par la TF inverse de $\hat{f}$).

La fonction F est bornée sur $\{|\Im z| \leq r\}$ (par $e^{2\pi r}$ fois la norme L^1 de $\hat{f}$). D'ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+ir)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi r\xi}\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq \|e^{2\pi r|\xi|}\hat{f}(\xi)\|^2_{L^2}.$$

Pour chaque $I \in \mathcal{I}$ on prend I_0 l'intervalle avec même centre que I'' et de taille moitié. On définit alors $\sigma_I = \{|\Im z| < r\} \setminus I_0$.

Pour $t \in I$, on se demande avec quelle probabilité un mouvement brownien partant de t va taper I_0 avant de taper $\{\Im z = \pm r\}$.

Cette probabilité κ_I est plus grande que $\dfrac{c_0}{8}e^{-2/r} \geq e^{-C/r} \geq \kappa$. (On rappelle que C dépend de c_0).

Comme $\log(F)$ est sous-harmonique, si X désigne la variable aléatoire qui a comme loi l'endroit où un mouvement brownien partant de t tape le $\partial\Sigma_I$, alors $2log(|F(t)|) \leq \mathbb{E}(2\log(|F(X)|)$.

Selon que X appartienne, ou pas, à I_0, on a

$$2\log(|f(t)|) \leq 4\kappa_I \mathbb{E}(\log|f(X)|/2\,|X \in I_0) + (1-\kappa_I)\mathbb{E}(\log|2F(X)|\,|X \notin I_0).$$

On a remplacé F par f lorsque la variable est réelle.

La fonction exponentielle est convexe, donc on applique Jensen :

$$|f(t)|^2 \leq \Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)\Big)^{4\kappa_I} \Big(\mathbb{E}(F(X)^2|X \notin I_0)\Big)^{1-\kappa_I}.$$

On veut remplacer κ_I par $\kappa \leq \kappa_I$ dans cette expression.

Si $\Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)\Big)^4 < \mathbb{E}(F(X)^2|X \notin I_0)$, alors

$$|f(t)|^2 \leq \Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)\Big)^{4\kappa} \Big(\mathbb{E}(F(X)^2|X \notin I_0)\Big)^{1-\kappa}.$$

Dans le cas contraire,

$$|f(t)|^2 \leq \Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)\Big)^4.$$

Donc, dans tous les cas,

$$|f(t)|^2 \leq \Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)\Big)^{4\kappa} \Big(\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0)^4 + \mathbb{E}(F(X)^2|X \notin I_0)\Big)^{1-\kappa}.$$

Les mesures sur I_0 et sur les deux copies de la droite réelle considérées sont en fait des mesures à densité par rapport à Lebesgue. La densité sur I_0 est dans L^p pour tout $p < 2$, avec norme bornée en fonction de la distance de t à I_0. De plus, la densité sur $\Im z = \pm r$ est majorée par $\frac{2}{r}e^{-\Re(z)}$. Ces résultats, comme la borne inf sur l'espérance d'atteindre I_0, sont obtenus par une transformation conforme qui permet de calculer explicitement les mesures en question.

Alors

$$\mathbb{E}(|f(X)|^{1/2}|X \in I_0) \leq C\|f\|_{L^2(I_0)}^{\frac{1}{2}}$$

puisque la densité est $L^{4/3}$.

Finalement

$$|f(t)|^2 \leq \frac{C}{r}\|f\|_{L^2(I_0)}^{2\kappa}\left(\int_{\Im z\in\{-r,0,r\}} e^{-d(\Re z,I)}|F(z)|^2 \mathrm{d}z\right)^{1-\kappa}.$$

On intègre sur $I \setminus I''$ et on somme sur les intervalles. $\square$

En utilisant les deux propositions précédentes, on montre un principe d'incertitude pour les fonctions dont la TF a un support dans un ensemble régulier :

Lemme 2.7. *Soit $Z \subset [-\alpha_1, \alpha_1]$, qui soit $(\delta, C_R, 1, \alpha_1)$-régulier avec $\alpha_1 \geq 2$ et $0 < \delta < 1$. Soit $\mathcal{I}$ une collection d'intervalles disjoints, de taille $c_1 > 0$, tel que $I_j \subset [j, j+1]$.*

Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la TF est supportée dans Z, pour tout $K > 10$ et $\kappa = \exp(-C(\log K)^{\frac{1+\delta}{2}})$, on a

$$\|\hat{f}\|_{L^2([-1,1])}^2 \leq CK^{21}\left(\|f\|_{H^{-10}(I)}^2 + \exp(-C^{-1}(\log K)^{-\frac{1+\delta}{2}}K)\|f\|_{H^{-10}}^2\right)^{\kappa}\|f\|_{H^{-10}}^{2(1-\kappa)}.$$

Preuve. Soit $Y = \{y \in \mathbb{R}, d(y, Z) \leq 2\}$. Alors Y est $(\delta, 100C_R, 2, \alpha_1 + 2)$-régulier. On applique le premier lemme, et on a ψ à support compact dont la transformée de Fourier décroît très vite sur Y.

Pour $|\eta| < 2$, on pose g_η telle que

$$\hat{g}_\eta(\xi) = \hat{f}(\xi - \eta)\hat{\psi}(\xi).$$

Le support de $\hat{f}(\cdot - \eta)$ est contenu dans Y par définition, donc par la construction précédente,

$$|\hat{g}_\eta(\xi)| \geq \exp\left(-c_2(\log(10 + |\xi|))^{-\frac{1+\delta}{2}}|\xi|\right)|\hat{f}_\eta(\xi)|.$$

Décomposons $\hat{g}_\eta$ en $\hat{g}_1 + \hat{g}_2$, où $\hat{g}_1$ est constitué des fréquences plus petites que K.

Alors, par la dernière formule,

$$\|\hat{g_2}\|_{L^2} \leq C\exp(-C^{-1}(\log(K))^{\frac{1+\delta}{2}}K)\|f\|_{H^{-10}}.$$

Par ailleurs, pour $r(K)$ assez petit (mais plus grand que cK^{-1}),

$$\sup_{|\xi|\leq K} e^{2\pi r|\xi|}\exp(-c_2(\log(10+|\xi|))^{-\frac{1+\delta}{2}}|\xi|)\leq 1.$$

Ainsi,

$$\|e^{2\pi r|\xi|}\hat{g}_1(\xi)\|_{L^2}\leq CK^{10}\|f\|_{H^{-10}}.$$

En appliquant le second lemme à g_1, contrôler $\|g_1\|_{L^2}$ revient à contrôler $\|g_1\|_{L^2(\mathcal{I}'')}$, car

$$\|g_1\|_{L^2}^2\leq \frac{CK^{20}}{r}\|g_1\|_{L^2(I'')}^{2\kappa}\|f\|_{H^{-10}}^{2(1-\kappa)}.$$

Par convolution, si $\mathcal{I}''\subset\mathcal{I}'\subset\mathcal{I}$, alors

$$\|g_1\|_{L^2(U'')}\leq C\|1_{I'}f\|_{H^{-10}}+\|g_2\|_{L^2}.$$

Il ne reste plus qu'à dire que, comme ψ est grande sur $[-1,1]$, alors

$$\|\hat{f}\|_{L^2((-1,1))}^2\leq C\|g_\eta\|_{L^2}^2.$$

$\square$

On peut alors démontrer

Proposition 2.8. *Comme précédemment on prend Z un ensemble $(\delta,1,\alpha_1,C_R)$-régulier, et pour tout intervalle $[j,j+1]$ on choisit un sous-intervalle I' de taille $c_1>0$, dont on note $\mathcal{I}'$ l'union.*

Alors il existe $c_3(\delta,C_R,c_1)$ tel que, pour tout $f\in L^2(\mathbb{R})$, si supp$\hat{f}\subset Y$, alors

$$\|f\|_{L^2(U')}\geq c_3\|f\|_{L^2}.$$

Preuve. Soit $\ell\in\mathbb{Z}$ avec $|\ell|\leq\alpha_1$. L'ensemble $Y+\ell$ est $(\delta,1,\alpha_1,C_R)$-régulier par translation.

Posons $f_l=e^{2i\pi\ell x}f$. Alors $\hat{f}_l$ est supportée sur $Y+\ell$. On applique le lemme précédent à $\hat{f}_\ell$, alors on a

$$\|\hat{f}_\ell\|_{L^2((-1,1))}^2\leq CK^{21}(\|1_{I'}f_\ell\|_{H^{-10}}^2+\exp(-C^{-1}\log(K)^{-\frac{1+\delta}{2}}K)\|f_\ell\|_{H^{-10}}^2)^\kappa\|f_\ell\|_{H^{-10}}^{2(1-\kappa)}.$$

Maintenant

$$\|f\|_{L^2}\leq\sum_{|\ell|\leq\alpha_1}\|\hat{f}_\ell\|_{L^2([-1,1])}^2.$$

Par Hölder on peut rentrer les sommes dans les puissances, et

$$\sum_\ell\|f_\ell\|_{H^{-10}}^2\leq C\|f\|_{L^2}^2,$$

de même que

$$\sum_\ell\|1_{I'}f_\ell\|_{H^{-10}}^2\leq C\|f\|_{L^2(I')}^2.$$

Comme $\kappa = \exp(-C\log(K)^{\frac{1+\delta}{2}})$ avec $\delta < 1$, on a $\kappa > K^{-\frac{1}{2}}$, donc la contribution

$$K^{21}\exp(-C^{-1}(\log(K))^{-\frac{1+\delta}{2}}\kappa K)$$

est très petite si K est choisi assez grand. Finalement seulement l'autre contribution reste. $\square$

On peut maintenant conclure : en $C\log(N)$ étapes, on recouvre X par des intervalles disjoints de plus en plus fins. Si Ψ_k est une fonction lisse adaptée, avec $\Psi_k \geq 1$ sur X et qui s'annulle non loin, alors si $supp\hat{f} \subset Y$ on a $supp\hat{\Psi_k f} \subset Z_k$ où $Z_k = \{y \in \mathbb{R}, d(y,Y) \leq N^{\alpha k}\}$. Après un rescaling pour se ramener à des sous-intervalles de $[j, j+1]$, on a un ensemble $(C, \delta, 1, \alpha_k(N))$-régulier à nouveau (on est dans un voisinage de taille 1 d'un ensemble $(C, \delta, N^{-\alpha k}, \alpha_k(N))$-régulier.

On contrôle donc $\|f\|_{L^2(X)}$ en mettant un truc à la puissance $c\log(N)$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] Jean Bourgain and Semyon Dyatlov. Spectral gaps without the pressure condition. *arXiv preprint arXiv :1612.09040*, 2016.

[2] C. Shubin, R. Vakilian, and T. Wolff. Some harmonic analysis questions suggested by Anderson-Bernoulli models. *Geometric and Functional Analysis*, 8(5) :932–964, 1998.