

PROJECTEUR DE SZEGÖ ET THÉORÈME DE KODAIRA

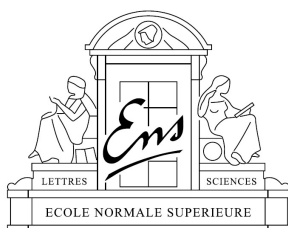
ALIX DELEPORTE



Mémoire de Master

Sous la direction de Nalini Anantharaman.

Septembre 2015 – version informatique



Merci de ne pas imprimer ce document. Une version imprimable est disponible à la demande.

Alix Deleporte : *Projecteur de Szegő et théorème de Kodaira*, Mémoire de Master, © Septembre 2015

DIRECTRICE DE MÉMOIRE :
Nalini Anantharaman

ETABLISSEMENT D'ACCUEIL :
Université de Strasbourg

Ce mémoire est le résultat d'un travail bibliographique qui a commencé l'an dernier, avec la lecture d'un article de Benoît Douçot. Il est logiquement à l'origine de mon travail, et je souhaiterais le remercier pour les échanges que nous avons eu.

Divers établissements m'ont invité, et je les en remercie : le Labex Henri Lebesgue pour deux conférences (Rennes et Roscoff), l'université de Göttingen pour une conférence à Marburg, enfin et surtout l'UFR Math-Info de l'université de Strasbourg, qui a aussi eu la gentillesse de prendre en charge d'autres déplacements.

Je remercie également le réseau des bibliothèques étudiantes de Strasbourg, qui a eu la souplesse de m'accorder des emprunts.

Par ailleurs, je remercie Marie-Pierre Carteron pour son accueil lors de mon premier stage à Strasbourg.

Certains mathématiciens aguerris ont eu la patience de partager leurs connaissances avec moi, et je souhaiterais remercier Bernard Helffer, Thomas Delzant, Slava Kharlamov, Pierre Py, Emmanuel Opshtein et Nicolas de Saxcé pour leur bienveillance à cet égard.

A ce sujet, je souhaiterais évoquer la mémoire de Louis Boutet de Monvel, disparu le 26 décembre 2014.

Enfin, et surtout, je remercie chaleureusement Nalini Anantharaman, qui m'a guidé dans mes choix ; je suis très heureux d'avoir l'opportunité de continuer en thèse avec elle.

RÉSUMÉ

Les fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe d'une variété complexe, lisses jusqu'au bord, voient leur valeur au bord vérifier une certaine EDP, appelée équation de Cauchy-Riemann ; le projecteur de Szegő est alors défini comme le projecteur orthogonal, dans l'espace des fonctions L^2 sur le bord, sur le noyau de cette EDP (appelé espace de Hardy).

Boutet de Monvel et Sjöstrand ont établi que ce projecteur s'exprime selon un Opérateur Intégral de Fourier à phase complexe [BdMS75]. L'étude de cette structure analytique permet de retrouver deux théorèmes de la géométrie algébrique complexe : le théorème du plongement de Kodaira, et le théorème de quasi-isométrie de Tian.

Nous établissons l'outil technique principal pour cette étude, les Opérateurs Intégraux de Fourier. Pour cela, nous suivons les constructions de Hörmander [Hör03, Hör07, Hör85]. En particulier, nous traitons les OIF par leur idéal lagrangien. Nous reprenons les constructions de l'article [BdMS75] pour introduire les raisonnements de l'article [Zel00], qui montre un développement asymptotique de la diagonale du noyau de Szegő équivariant, et démontre ainsi l'existence de l'application de Kodaira et sa quasi-isométrie. Nous suivons enfin les raisonnements de l'article [SZ02] afin d'établir une construction similaire dans le cas où la variété est symplectique. Une estimation plus précise sur le noyau de Szegő est démontrée, qui permet de démontrer l'injectivité de l'application de Kodaira.

TABLE DES MATIÈRES

1	OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER	13
1.1	Intégrales à phases	13
1.1.1	Le lemme de phase non stationnaire	13
1.1.2	Le théorème de phase stationnaire	16
1.1.3	Classes d'intégrales à phases	25
1.2	Opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle	27
1.2.1	Opérateurs pseudo-différentiels	27
1.2.2	Opérations sur les opérateurs pseudo-différentiels	29
1.2.3	Front d'onde	32
1.2.4	Opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle .	34
1.2.5	Idéaux lagrangiens associés à une phase	35
1.2.6	Composition des opérateurs intégraux de Fou- rier à phase réelle	38
1.2.7	Opérateurs régularisants et équivalence	40
1.3	Opérateurs Intégraux de Fourier à phase complexe . . .	41
1.3.1	Définitions	41
1.3.2	Idéaux lagrangiens positifs	42
2	PROJECTEUR DE SZEGO	45
2.1	Espace de Hardy	45
2.1.1	Un exemple : le disque unité du plan complexe .	45
2.1.2	Le cas plus général	48
2.2	Structure du projecteur de Szego	49
2.2.1	Construction d'un projecteur approximatif . . .	50
2.2.2	Identification avec le projecteur exact	58
2.2.3	Développement asymptotique du symbole	63
2.3	Fibrés positifs sur une variété de kähler compacte	65
2.3.1	Sections holomorphes de fibrés positifs	65
2.3.2	Espaces de Hardy équivariants	67
2.3.3	La preuve	69
3	STRUCTURE DE TOEPLITZ	71
3.1	Construction du projecteur approximatif	72
3.1.1	Des bonnes coordonnées locales	72
3.1.2	Construction de générateurs	73
3.1.3	Paramétrisation de l'idéal	74
3.1.4	Construction d'un projecteur de Szego	75
3.1.5	Opérateur pseudo-différentiel associé à S	76
3.2	Asymptotiques dans l'espace de Hardy	77
3.2.1	Comportement du noyau près de la diagonale . .	77
3.2.2	Applications à Kodaira et Tian	79
A	APPENDICE : NOTIONS DE GÉOMÉTRIE COMPLEXE	83
A.1	Structures de Cauchy-Riemann	83

A.1.1	Complexification de l'espace tangent et définitions	83
A.1.2	Equation de Cauchy-Riemann et valeur au bord de fonctions holomorphes	85
A.1.3	Structure presque complexe et presque Cauchy- Riemann	86
A.2	Pseudoconvexité	88
A.2.1	Fonctions pluri-sous-harmoniques	88
A.2.2	Ouverts pseudoconvexes	90
A.2.3	Pseudoconvexité et frontière	91
A.2.4	Exemples	93
A.2.5	Intégration des équations de Cauchy-Riemann .	94
BIBLIOGRAPHIE		95

TABLE DES THÉORÈMES

1	Théorème (de phase stationnaire)	16
2	Théorème (Hormander)	38
3	Théorème (Boutet-Sjöstrand)	50
4	Théorème (Zelditch)	67
5	Théorème (Kodaira)	67
6	Théorème (Tian)	67
7	Théorème (Shiffman-Zelditch)	77
8	Théorème (Newlander-Nirenberg)	87
9	Théorème (Kohn)	94

INTRODUCTION

Durant les dernières décennies, un nouveau parallèle a émergé entre la géométrie différentielle et l'analyse spectrale. Cette association a été motivée par l'intuition physique d'une correspondance entre des phénomènes relevant de la mécanique classique (géodésiques, ou plus généralement flots hamiltoniens) et l'asymptotique de phénomènes quantiques (lorsque $h \rightarrow 0$ ou lorsque l'énergie du système devient très grande). Nos recherches ont pour origine un article de B. Douçot et P. Simon [DS98], sur le fond du spectre de réseaux de spins ferromagnétiques ou antiferromagnétiques, dans la limite semiclassique. Le cadre originel dans lequel les outils semiclassiques ont été développés [Hel88, Zwo12] est celui de la quantification de Weyl sur \mathbb{R}^{2n} , et dans une moindre mesure des opérateurs de type $-h^2\Delta + V$ sur des variétés riemanniennes. Cependant, le cadre théorique de la quantification des spins [MM12, Bor00] est différent. Il existe à ce jour trop peu de résultats similaires au cas de la quantification de Weyl (on peut citer [BPU98]), s'agissant en particulier de l'étude des états fondamentaux. Douçot et Simon conjecturent cependant que les résultats de [Hel88] sont applicables à la quantification des spins.

Dans ce mémoire, nous avons cherché à étudier l'asymptotique du noyau de Szegő, dont nous pensons qu'il sera utile pour démontrer des résultats en ce sens. Un tel développement asymptotique a été proposé par B. Shiffman et S. Zelditch [Zel100, SZ02], où il sert d'autres fins. Ce mémoire a été pensé comme une introduction bibliographique au futur travail doctoral. En ce sens, plutôt que d'utiliser cette formule pour transposer les résultats de [Hel88], nous nous sommes donné pour but de comprendre les tenants et aboutissants de ce développement asymptotique et de ses conséquences directes. Il ne sera donc pas directement question ici de quantification.

Dans les années 1970, L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand [BdMS75] ont établi un théorème donnant la structure analytique du projecteur sur le noyau d'un certain opérateur différentiel $\bar{\partial}_b$ apparaissant en géométrie complexe, appelé projecteur de Szegő. Ces travaux ont fait suite à un important travail d'étude de la géométrie complexe par le biais des opérateurs différentiels associés, et notamment les résultats de J.J. Kohn [KR65]. Le contexte théorique de [BdMS75] est celui des Opérateurs Intégraux de Fourier (OIF), généralisations des opérateurs pseudo-différentiels. Il nous a semblé judicieux de consacrer un chapitre entier à l'introduction de ces outils, en suivant le formalisme de Hörmander [Hör07, Hör85, Hör03] puisque c'est celui dont se servent Boutet de Monvel et Sjöstrand. Il s'agit d'abord de définir

des intégrales à phase oscillante comme des distributions : pour φ et a convenables, on donne un sens distributionnel à l'intégrale

$$u \mapsto \int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) u(x,y) dx dy d\theta.$$

Ensuite, nous étudions le comportement des opérateurs dont le noyau-distribution est une telle intégrale. Nous raisonnons par degrés de généralisation successifs, en étudiant d'abord les opérateurs pseudo-différentiels (avec $\varphi(x,y,\theta) = \langle \theta, x-y \rangle$), puis les OIF à phase réelle, et enfin les OIF à phase complexe.

Les pré-requis de géométrie complexe ont, eux, été placés en annexe. Nous nous intéressons principalement aux espaces de fonctions définies sur le bord d'un ouvert d'une variété complexe, en se demandant sous quelle condition ces fonctions sont trace au bord d'une fonction holomorphe à l'intérieur. On peut construire un opérateur différentiel $\bar{\partial}_b$ sur le bord, par restriction de l'opérateur $\bar{\partial}$. Être dans le noyau de $\bar{\partial}_b$ est naturellement une condition nécessaire au fait d'être la trace au bord d'une fonction holomorphe, c'est-à-dire dans le noyau de $\bar{\partial}$. Un théorème de Kohn [KR65] énonce que sous l'hypothèse de *forte pseudoconvexité* de l'ouvert, l'ensemble de ces fonctions est exactement le noyau L^2 de l'opérateur différentiel $\bar{\partial}_b$; ce noyau est appelé espace de Hardy.

Dans le chapitre 2, on utilise le formalisme des Opérateurs Intégraux de Fourier pour analyser le projecteur orthogonal sur le noyau de $\bar{\partial}_b$. On commence par étudier des propriétés élémentaires, et notamment l'isométrie entre l'espace de Hardy et un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à l'intérieur, qui n'est *pas* l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable. On constate en effet une perte de dérivées : sur un exemple aussi élémentaire que le disque unité de \mathbb{C} , les fonctions dans $L^2(S^1)$ qui sont trace au bord de fonctions holomorphes à l'intérieur sont les séries de Fourier dont seuls les coefficients positifs sont non nuls. Une base hilbertienne de cet espace est l'ensemble des $\theta \mapsto e^{in\theta}$ pour $n \geq 0$. Ces fonctions sont les traces au bord des fonctions $z \mapsto z^n$, qui ne sont pourtant pas normalisées dans $L^2(B(0,1))$.

Ces considérations sont cruciales dans la preuve du résultat de Boutet et Sjöstrand concernant l'interprétation du projecteur orthogonal sur l'espace de Hardy (projecteur de Szegő) en tant qu'OIF, pour des ouverts fortement pseudoconvexes. Après avoir construit un projecteur approximatif à partir de la structure symbolique de $\bar{\partial}_b$, on démontre que les deux projecteurs sont égaux à un opérateur régularisant près en utilisant l'identification précédente, qui permet de se ramener à un autre résultat de Kohn traitant des fonctions holomorphes dans un ouvert.

Une application de ce résultat a été proposée par S. Zelditch dans [Zel100]. Ici, les ouverts qui nous intéressent sont des fibrés en disques

sur une variété M . Ainsi, le bord de ces ouverts admet une action de S^1 par rotation, et l'opérateur $\bar{\partial}_b$ commute avec l'opérateur d_θ qui engendre cette rotation. Le spectre de d_θ est \mathbb{Z} , et les espaces propres communs sont appelés *espaces de Hardy équivariants*. La codiagonalisation permet de traduire la structure microlocale du projecteur de Szegő en des résultats asymptotiques, puisque les grandes valeurs du spectre de d_θ correspondent à des fréquences élevées. On peut donc démontrer, par le lemme de phase stationnaire, une estimation de la diagonale du noyau du projecteur de Szegő équivariant.

Cette estimation possède une interprétation géométrique. En effet, les espaces de Hardy équivariants s'interprètent comme des espaces de sections holomorphes dans des puissances tensorielles de plus en plus grandes du même fibré en droites sur M , de la manière suivante. On considère (L^*, h^*) le fibré en droites sur M et sa structure hermitienne, tels que $\{v \in L^*, h^*(v) < 1\}$ est le fibré en disques qui nous intéresse. Soit (L, h) le fibré dual. Alors à s , une section holomorphe L^2 de $L^{\otimes N}$, on peut associer une fonction \hat{s} dans l'espace de Hardy N -équivariant, par $\hat{s}(m, v) = \langle s(m), v \otimes \dots \otimes v \rangle$. Cette association est en fait une isométrie.

Les espaces de sections holomorphes de $L^{\otimes N}$ sont impliqués par exemple dans les constructions classiques qui permettent de démontrer le théorème de plongement de Kodaira. En fait, l'expression asymptotique de la diagonale du projecteur permet en soi d'immerger dans un espace projectif toute variété complexe possédant un fibré en droites de courbure positive (cette condition équivaut à la pseudoconvexité du fibré en disques associé). Si on définit sur la variété de départ une métrique correspondant à la courbure du fibré, on trouve que ce plongement est presque isométrique, un résultat connu sous le nom de théorème de Tian.

Dans le chapitre 3, on expose deux extensions de cette idée, comprises dans un article de B. Shiffman et S. Zelditch [SZ02]. La première est un développement du noyau de Szegő sur un voisinage de la diagonale, qui permet notamment de montrer l'injectivité de l'application de Kodaira. La seconde extension concerne une construction « à l'envers » : on peut recopier la structure du projecteur de Szegő pour créer de toutes pièces un projecteur sur des variétés qui ne sont plus complexes, mais seulement symplectiques. Une motivation supplémentaire est donnée par le fait que la seule condition géométrique nécessaire à la construction de ce projecteur artificiel est la condition nécessaire à la quantification géométrique au sens de Kostant et Souriau [Woo97], à savoir le fait que la classe de cohomologie de Chern de la forme symplectique est entière.

OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER

1.1 INTÉGRALES À PHASES

1.1.1 Le lemme de phase non stationnaire

Dans cette section, on établit un lemme d'une importance capitale dans la construction et l'étude des intégrales dont l'un des termes oscille très rapidement. On veut étudier le comportement asymptotique, quand $t \rightarrow +\infty$, des intégrales du type

$$\int u e^{it\varphi},$$

où les fonctions u et φ sont lisses, et où évidemment $\text{Im}\varphi \geq 0$.

Le lemme suivant montre que les seuls points intéressants sont ceux où $d\varphi = 0$ et où $\text{Im}\varphi = 0$:

Lemme 1.1 (Phase non stationnaire). Soit K un compact de \mathbb{R}^n , ainsi que X un voisinage de K , et soit j et k des entiers naturels. Soit $\varphi \in C^{k+1}(X)$ telle que $\text{Im}\varphi \geq 0$. Alors il existe une constante C , telle que pour tout $t > 0$ et $u \in C_0^k(K)$:

$$t^{j+k} \left| \int e^{it\varphi(x)} u(x) (\text{Im}\varphi(x))^j dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K \left[|D^\alpha u| (|\varphi'|^2 + \text{Im}\varphi)^{|\alpha|/2-k} \right].$$

De plus C est bornée lorsque φ varie dans un domaine borné de $C^{k+1}(X)$.

Preuve du lemme de phase non-stationnaire

On suit ici la preuve de Hörmander, exposée dans [Hör03].

On introduit, pour des besoins de lisibilité, la notation suivante. Lorsque $f \in C^l$, on note, pour x dans le domaine de définition de f :

$$|f|_l(x) := \sum_{|\alpha|=l} |\partial^\alpha f|(x).$$

Lorsque $k = 0$, l'inégalité à démontrer devient :

$$\left| \int_{\mathbb{K}} u(x) t^j (\operatorname{Im} \varphi(x))^j e^{it\varphi(x)} dx \right| \stackrel{?}{\leq} C(\varphi) \sup |u|.$$

Or la fonction $t \mapsto t^j e^{-t}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ , donc en fait C ne dépend même pas de φ .

Pour prouver le cas général par récurrence sur k , on raisonne par intégrations par parties. Posons $N = |\varphi'|^2 + \operatorname{Im} \varphi$. En remplaçant φ par $\varphi + i\epsilon$, on peut supposer que $\operatorname{Im} N > 0$, sous réserve de montrer que C ne dépend pas de ϵ .

Alors on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N}{N} \\ &= \frac{\operatorname{Im} \varphi}{N} + \sum_{\nu=1}^n \frac{(\partial_{\nu} \bar{\varphi})(\partial_{\nu} \varphi)}{N}. \end{aligned}$$

En suivant cette décomposition, on définit

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{u}{N} \\ u_{\nu} &= \frac{u \partial_{\nu} \bar{\varphi}}{N}, \end{aligned}$$

et alors :

$$u = \sum_{\nu=1}^n u_{\nu} \partial_{\nu} \varphi + u_0 \operatorname{Im} \varphi.$$

Cette écriture est motivée par le fait que $it(\partial_{\nu} \varphi) e^{it\varphi} = \partial_{\nu} e^{it\varphi}$.

On a donc, en remplaçant u et en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int u (\operatorname{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} &= \int u_0 (\operatorname{Im} \varphi)^{j+1} e^{it\varphi} \\ &+ \frac{i}{t} \sum_{\nu=1}^n \left[\int (\partial_{\nu} u_{\nu}) (\operatorname{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} + j \int u_{\nu} (\partial_{\nu} \operatorname{Im} \varphi) (\operatorname{Im} \varphi)^{j-1} e^{it\varphi} \right]. \end{aligned}$$

Commençons par traiter le cas $j = 0$. On a alors, par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} t^{j+k} \left| \int u (\operatorname{Im} \varphi)^j e^{it\varphi} \right| &\leq C \left[\sum_{|\alpha| \leq k-1} \sup |D^{\alpha} u_0| N^{|\alpha|/2-k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \sup |D^{\alpha} u_{\nu}| N^{|\alpha|/2-k+1} \right], \end{aligned}$$

où C est bornée lorsque f varie dans un domaine borné.

En remplaçant u_0 et u_ν par leur valeur, il ne reste plus qu'à montrer que les puissances se compensent, c'est-à-dire, pour tout l :

$$\sqrt{N}|u_\nu|_l + \sqrt{N}|u_0|_l \leq C \sum_{|\alpha| \leq l} |D^\alpha u| N^{(|\alpha|-l)/2}.$$

Raisonnons par récurrence sur l . Pour $l = 0$, d'abord, on a

$$\sqrt{N}|u/N\partial_\nu\varphi + N|u/N| \leq (\sqrt{N} + 1)|u|.$$

Pour l non nul, si $|\alpha| = l$, alors en appliquant ∂^α à l'équation $Nu_\nu = u\partial_\nu\bar{\varphi}$, et en contrôlant toutes les dérivées d'ordre plus grand que 2 de N et de φ par des constantes (qui ne dépendent que de $\|\varphi\|_{W^{l,\infty}(X)}$), on a :

$$N|u_\nu|_l \leq C \left(|N|_1 |u_\nu|_{l-1} + \sum_{l'=0}^{l-2} |u_\nu|_{l'} + |u|_l |\varphi|_1 + \sum_{l'=0}^{l-1} |u|_{l'} \right).$$

Pour évaluer $|N|_1$ et $|\varphi|_1$, on se sert du :

Lemme 1.2. Si $g \in C^2(]-1, 1[)$ vérifie $g \geq 0$, alors on a :

$$|g'(0)|^2 \leq g(0) (g(0) + 2 \sup |g''|).$$

Démonstration. (du lemme) En notant $M = \sup |g''|$ on a, pour tout $|x| \leq 1$, que $g(0) + xg'(0) + Mx^2/2 \geq g(x) \geq 0$, et l'étude des racines de ce polynôme du second degré nous fournit le résultat demandé. \square

En majorant à nouveau $|N|_2$ et $|\varphi|_2$ par des constantes qui restent bornées lorsque φ varie dans un domaine borné de C^{l+1} , on trouve que $|N|_1 \leq CN^{1/2}$, et la même propriété pour φ . Alors le développement précédent devient :

$$N|u_\nu|_l \leq C \left(N^{1/2} |u_\nu|_{l-1} + \sum_{r=0}^{l-2} |u_\nu|_r + |u|_l |\varphi|^{1/2} + \sum_{r=0}^{l-1} |u|_r \right).$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence aux deux premiers termes :

$$\begin{aligned} N^{1/2} |u_\nu|_{l-1} &\leq C \sum_{r=0}^{l-1} |u|_r N^{(r-l+1)/2} \\ |u_\nu|_r &\leq C \sum_{s=0}^r |u|_s N^{(s-r-1)/2} \\ &\leq C \sum_{s=0}^{n-2} |u|_s N^{(s-l+1)/2}. \end{aligned}$$

En injectant ces résultats et en divisant par $N^{1/2}$, on obtient le résultat désiré. Pour u_0 , la méthode est la même, mais il n'y a pas de termes en φ .

Ceci conclut le cas $j = 0$. Pour les autres valeurs de j , on raisonne par récurrence. Si on suppose que le résultat est vrai pour $(k, j - 1)$, alors on peut traiter le dernier terme de la décomposition, qui est contrôlé par :

$$C \sum_{v=1}^n \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha (u_v \partial_v \operatorname{Im} \varphi)| N^{|\alpha|/2-k}.$$

On peut alors développer $|u_v \partial_v \operatorname{Im} \varphi|_l$ pour le contrôler en utilisant à nouveau le lemme 1.2, exactement comme précédemment.

Ceci conclut la preuve du lemme 1.1.

1.1.2 Le théorème de phase stationnaire

Nous nous penchons ici sur le comportement des intégrales oscillantes, mais cette fois-ci, au voisinage des points x_0 qui vérifient $N = 0$, donc $\operatorname{Im} \varphi(x_0) = 0$ et $d\varphi(x_0) = 0$. On appelle *point critique* un tel point x_0 . On suppose toujours ici que φ est *positive*, c'est-à-dire vérifie $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$, et que tous les points critiques de φ sont *non-dégénérés*, et on entend par là que $\operatorname{Hess} \varphi$ est inversible en ces points. L'ensemble des points critiques est alors discret (et son intersection avec K est finie), ce qui permet de raisonner par partition de l'unité.

Remarquons que les deux conditions de positivité et de non dégénérescence impliquent que $\operatorname{Sp}(i \operatorname{Hess} \varphi(x_0)) \subset \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Sur ce demi-plan, il existe une racine carrée. On choisit celle qui est à valeurs dans $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, ce qui assure un sens univoque à l'écriture $\sqrt{\det i \operatorname{Hess} \varphi(0)}$.

On peut alors énoncer le

Théorème 1 (de phase stationnaire). Soit $\varphi \in C^{2j+1}(\operatorname{Vois}(K))$ telle que φ a 0 pour seul point critique dans le compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Il existe alors une famille $(C_l)_{0 \leq l \leq j}$, d'opérateurs différentiels, chacun de degré au plus $2l$, tels que, pour toute fonction $u \in C_c^{2j+1}(K)$, uniformément en t , on ait :

$$\int_K e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} C_l u(0) + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \|u\|_{W^{2j+n, \infty}}\right).$$

$$\text{En particulier on a } C_0 = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det i \operatorname{Hess} \varphi(0)}}.$$

Preuve dans le cas d'une phase quadratique

Nous commençons par traiter le cas où $\varphi(x) = iq(y, y)$, où q est une forme bilinéaire définie positive ; φ est alors une phase quadratique imaginaire pure.

Quitte à faire un changement de variables par une matrice orthogonale, on peut supposer que

$$q(y, y) = \sum_v \lambda_v \frac{y_v^2}{2}.$$

Soit maintenant $u \in C_c^{2j+1}(\mathbb{K})$. On dispose, sur tout \mathbb{R}^n , de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{2j} U_k(x) + R(x)$$

$$|R(x)| \leq \sup(|u|_{2j+1}) |x|^{2k+1},$$

où chaque U_k est k -multilinéaire. On peut alors faire le changement de variable $y = x/\sqrt{t}$, et remplacer u par le développement précédent. Par parité, les U_k pour k impairs ne vont pas contribuer à l'intégrale. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} \int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \sup |u|_{2j+1}\right).$$

Les U_{2l} ne dépendent que des dérivées d'ordre $2l$ de u en 0, donc on a bien la forme demandée. Toutefois, on va établir explicitement quels sont les opérateurs différentiels qui entrent en jeu.

Par intégrations par parties successives, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \frac{x^2}{2}} x^{2l} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2l+1}}} \frac{(2l)!}{2^l l!}.$$

Par ailleurs, on peut expliciter les fonctions U_l par la formule de Taylor :

$$U_{2l}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha|=2l} \partial^\alpha u(0) \prod_{v=1}^n \frac{x_v^{\alpha_v}}{\alpha_v!}.$$

Seuls les α dont tous les coefficients sont pairs vont contribuer à l'intégrale. En conjuguant par la transformée de Fourier, on peut donc écrire :

$$\int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy = \sqrt{\frac{\pi^n}{\prod \lambda_v}} \sum_{|\alpha|=l} \int (i\xi)^{2\alpha} \hat{u}(\xi) d\xi \prod_{v=1}^n \frac{1}{(\lambda_v)^{\alpha_v} \alpha_v!}.$$

On va synthétiser ce développement à l'aide de deux notations. On note P_l le projecteur qui à une fonction de classe C^∞ associe les termes d'ordre l de son développement de Taylor, on a donc $U_{2l} = P_{2l}u$. Par

ailleurs, si $Q = \sum Q_\alpha X^\alpha$ est un polynôme, on note $Q(D)$ l'opérateur différentiel $\sum Q_\alpha (i\partial)^\alpha$, et alors on a :

$$\int e^{-q(y,y)} U_{2l}(y) dy = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \text{Hess } q(0)}} P_j \left(e^{-\frac{1}{2}q^{-1}(D,D)} \right) u(0). \quad (1)$$

Nous avons donc une expression explicite de C_l . On constate qu'ici, les C_l ne font intervenir que des dérivées d'ordre exactement l .

Nous concluons par une remarque importante.

Remarque 1.3. Les expressions à gauche et à droite dans l'équation (1) sont analytiques par rapport à q , et admettent chacune une unique extension holomorphe dans l'ensemble des formes quadratiques complexes à partie réelle strictement positive. A droite, cela est dû aux considérations sur la racine du déterminant que nous avons déjà évoquées. A gauche, l'ajout d'une partie réelle ne change pas la convergence de l'intégrale et on peut utiliser le théorème de convergence dominée.

Tout ceci a pour conséquence que lesdites extensions holomorphes sont égales. On vient donc de démontrer le lemme de phase quadratique pour des phases complexes dont la partie imaginaire pure est non dégénérée.

Au vu de cette remarque, il ne reste à examiner que le cas où la $\text{Im } \varphi$ est seulement positive (et pas définie positive comme précédemment). Seule l'intégrale sur $\ker \text{Im } \varphi$ nous intéresse, puisque l'on peut calculer l'intégrale sur le complémentaire orthogonal par la méthode précédente, et que l'on dispose alors de bonnes conditions de domination pour assurer un comportement régulier de cette intégrale par rapport au paramètre dans $\ker \text{Im } \varphi$. Autrement dit, l'examen des phases quadratiques réelles suffit.

Notre contrôle est ici moindre que dans le cas précédent. En effet, la suite des fonctions définies par

$$u_n(x) = \chi(x) e^{-inq(x,x)}$$

est un contre-exemple à la proposition :

$$\forall (K, \varphi) \exists (C, t_0) \forall u \in C_c^\infty(K), t > t_0, \left| \int_K e^{it\varphi} u \right| \leq C t^{-n/2} \|u\|_\infty.$$

On considère donc $\varphi(x) = q(x,x)$ une phase réelle, avec $\det \varphi \neq 0$. La première étape consiste à calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{itq(x,x)}$. Pour cela on se ramène, par un changement de variables orthogonal, au cas où q est diagonale ; on peut alors séparer les variables. Il n'y a plus qu'à reporter le résultat bien connu :

$$\mathcal{F} \left(x \mapsto e^{i\frac{x^2}{2}} \right) : \xi \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} e^{i\frac{\xi^2}{2}}.$$

Et on obtient alors :

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{itq(x,x)}\right) : \xi \mapsto \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{t^n \det(iq)}} e^{i \frac{q^{-1}(x,x)}{4t}}.$$

La seconde étape est d'appliquer ce calcul à notre problème. Pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f_t = e^{it\varphi}u$ est en particulier dans la classe de Schwartz, donc on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi}u = \widehat{f}_t(0).$$

Soit un entier $j \in \mathbb{N}$. Pour tout t fixé, on peut développer l'exponentielle en série entière, et écrire de manière licite :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_t(0) &= t^{-n/2} \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det i q}} \left[\sum_{k=0}^j \frac{t^{-k}}{k!} \left(\frac{(-1)^n}{4} q^{-1}(D, D) \right)^k u(0) \right. \\ &\quad \left. + t^{-j-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k+j+1)!} \int (iq(x,x)/4)^k (iq(x,x)/4)^{j+1} u(x) dx \right]. \end{aligned}$$

On voit apparaître les opérateurs différentiels que l'on recherche :

$$\frac{(-1)^{nk} \pi^{n/2}}{4^k k! \sqrt{\det i q}} \left(q^{-1}(D, D) \right)^k. \quad (2)$$

Les autres termes peuvent être sommés, et on a un contrôle dans l'espace de Sobolev $H^{-n/2}$:

$$\begin{aligned} \left| t^{-j-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k+j+1)!} \int (iq/4)^k (iq/4)^{j+1} u \right| &\leq C(j, q) \|u\|_{W^{2, j+1+n/2}} \\ &\leq C(j, q, K) \|u\|_{W^{\infty, j+1+n/2}}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.

Preuve affaiblie dans le cas général

À partir du lemme de phase quadratique, il existe deux manières de démontrer le cas général. La première est d'utiliser le lemme de Morse pour se ramener, après un changement de variable, à une phase quadratique. Cette méthode présente néanmoins de nombreuses difficultés supplémentaires dans le cas d'une phase complexe puisqu'au lieu d'intégrer le long de l'axe réel, on intègre maintenant sur une courbe tangente à l'axe réel en l'origine. Une preuve détaillée est explicitée dans [MS75].

La seconde méthode est d'isoler, parmi la phase, le terme quadratique du reste, et c'est cette méthode que nous allons détailler.

Nous allons démontrer un résultat plus faible que le théorème original, où l'on contrôle par un nombre beaucoup plus important de dérivées.

Proposition 1.4 (Phase stationnaire faible). On suppose que $\varphi \in C^{2j+1}(\text{Vois}(\mathbb{K}))$ a 0 pour seul point critique dans le compact $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. Il existe alors une famille $(C_l)_{0 \leq l \leq j}$, d'opérateurs différentiels de degré au plus $2l$, tels que, pour toute fonction $u \in C_c^{2j+1}(\mathbb{K})$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, on ait :

$$\int_{\mathbb{K}} e^{it\varphi} u = t^{-n/2} \sum_{l=0}^j t^{-l} C_l u(0) + O\left(t^{-(n+1)/2-j} \|u\|_{W^{6j+1+n/2, \infty}}\right).$$

$$\text{En particulier on a } C_0 = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det i \text{Hess } \varphi(0)}}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in C^{j+1}(\text{Vois}(\mathbb{K}))$ une phase vérifiant $\text{Im } \varphi \geq 0$, et dont 0 est le seul point critique non dégénéré. On décompose :

$$\varphi(x) = iq(x) + r(x),$$

où q est une forme quadratique bien particulière. Comme dans le cas précédent, on va pouvoir faire une disjonction de cas.

1. Ou bien $\Re \varepsilon q \gg 0$;
2. Ou bien $\Re \varepsilon q \geq 0$ et $\text{Im } q$ est non dégénérée.

Dans tous les cas, r vérifie :

$$\forall |\alpha| \leq 2, \partial^\alpha r(0) = 0.$$

L'utilisation directe du lemme de phase quadratique ne permet pas de conclure car on a besoin de savoir que $\text{Im } \varphi$ ne s'annule pas ailleurs qu'en 0. On va donc découper l'intégrale à estimer en une intégrale sur $\text{Vois}(\mathbb{K}) \cap B(0, t^{-1/3})$ et une intégrale sur $\text{Vois}(\mathbb{K}) \setminus B(0, t^{-1/3})$.

Le second morceau est le plus simple à estimer. On sait qu'il existe ϵ tel que sur $B(0, \epsilon)$, on ait $|\varphi - iq| \leq \frac{1}{4}q$. En particulier, il existe une constante C telle que, pour t grand, sur $B(0, \epsilon) \setminus B(0, t^{-1/3})$, on ait :

$$\text{Im } \varphi + |\varphi'|^2 > Ct^{-2/3}.$$

Soit alors $j \in \mathbb{N}$, on peut estimer :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B(0, \epsilon) \setminus B(0, t^{-1/3})} e^{i\varphi(x)} u(x) dx \right| \\ & \leq Ct^{3(-2j-1)} \sum_{|\alpha| \leq 3(j+1)} \sup |D^\alpha u| (\text{Im } \varphi + |\varphi'|^2)^{|\alpha|/2 - 3(2j-1)} \\ & \leq Ct^{-(2j+1)} \|u\|_{W^{3(j+1), \infty}}. \end{aligned}$$

Ici, on constate déjà une perte de dérivées.

Sur $\text{Vois}(\mathbb{K}) \setminus \text{B}(0, \epsilon)$, on a $\text{Im}\varphi + |\varphi|^2 > C$, donc le lemme de phase non stationnaire s'applique directement et on a :

$$\left| \int_{\text{Vois}(\mathbb{K}) \setminus \text{B}(0, \epsilon)} e^{it\varphi} u \right| \leq C t^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{\mathbb{W}^{j+(n+1)/2, \infty}}.$$

Estimons à présent le premier morceau. On réalise d'abord un développement de e^{itr} en série entière en t ; l'interversion suivante est licite pour tout t :

$$\int_{\text{B}(0, t^{-1/3})} e^{it\varphi} u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{\text{B}(0, t^{-1/3})} e^{-tq(x)} (ir(x))^k u(x) dx.$$

Traitons chacune de ces intégrales séparément, de la même manière que dans le cas quadratique. On décompose d'abord :

$$(ir(x))^k u(x) = \sum_{l=3k}^{2j} U_{l,k}(x) + R_k(x).$$

Ici, chaque $U_{l,k}$ est homogène de degré j , et s'exprime uniquement en fonction de φ et des dérivées de u en 0, et on a de plus

$$|R(x)| \leq C(j) \sup(|r^k u|_{2j+1}) x^{2j+1}.$$

On réalise alors un changement de variable $y = x\sqrt{t}$, pour arriver à la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\text{B}(0, t^{-1/3})} e^{-tq(x)} (ir(x))^k u(x) dx \\ &= t^{-n/2} \sum_{l=3k}^{2j} \left(t^{-l/2} \int_{\text{B}(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{\text{B}(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} R_k(y/\sqrt{t}) dy \right). \end{aligned}$$

D'une part, on a, pour tous k, l , pour la même raison que précédemment :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \text{B}(0, t^{1/6})} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy = O\left(t^{-j-(n+1)/2} |r^k u|_l(0)\right).$$

On peut donc remplacer sans problème un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,t^{-1/3})} e^{-tq(x)} u(x) dx \\ &= t^{-n/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{l=3k}^{2j} t^{-l/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(y)} U_{l,k}(y) dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right) \\ & \quad + O\left(t^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}}\right). \end{aligned}$$

Après élimination des termes avec l impairs, on peut regrouper ces intégrales, dont on connaît un développement exact en fonction des dérivées de u en 0. On constate que seules des puissances entières de t apparaissent, et par ailleurs, dans le terme en t^m , on dérive u au plus $2m$ fois. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,t^{-1/3})} e^{-tq(x)} u(x) dx \\ &= t^{-n/2} \sum_{m=0}^{2j} A_m u(0) \\ & \quad + t^{-n/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \\ & \quad + O\left(t^{-j-(n+1)/2} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, souvenons-nous maintenant que :

$$|R(x)| \leq C(j) \sup(|r^k u|_{2j+1}) |x|^{2j+1}.$$

Traisons alors le cas 1. L'autre cas se traite par un argument de transformée de Fourier, similaire à la preuve du lemme de phase quadratique.

Par une disjonction de cas, si $2j + 1 \geq 3k$, alors

$$\begin{aligned} & \left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \\ & \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1,\infty}} t^{-j-1/2} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} |y|^{2j+1} dy. \end{aligned}$$

On constate qu'avec cette méthode, on perd des dérivées :

$$\left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1,\infty}} t^{-j/3-1/6}.$$

De même, si $2j + 1 < 3k$, alors on a $|r^k u|(x)_{2j+1} \leq Cx^{3k-2j-1}$, donc :

$$\left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \leq C(j) \|u\|_{W^{2j+1,\infty}} t^{1/3(2j+1-3k)} t^{-j-1/2} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} |y|^{2j+1} dy.$$

Et on a la même perte de dérivées :

$$\left| \frac{t^k}{k!} \int_{B(0,t^{1/6})} e^{-q(y)} R(y/\sqrt{t}) dy \right| \leq \frac{C(j)}{k!} \|u\|_{W^{2j+1,\infty}} t^{-j/3-1/6}$$

Ce terme d'erreur est plus grand que certains des termes du développement. En éliminant ces termes et en remplaçant j par $3j$, on conclut la démonstration de la proposition 1.4. \square

Remarque 1.5. Le théorème 1 est démontré dans [Hör03], en utilisant une décomposition de l'espace des fréquences.

Un exemple

On va calculer les premiers coefficients C_0, C_1, C_2 associés à la phase réelle sur \mathbb{R} définie par

$$\varphi(x) = x^2 + x^3 + x^4.$$

Cette phase est strictement positive ailleurs qu'en 0, où elle s'annule exactement à l'ordre 2, avec $\text{Hess } \varphi(0) = 2$.

On a donc directement

$$C_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2i}}.$$

Commençons par calculer les premiers coefficients (C'_i) qui correspondent à la seule phase $x \mapsto x^2$, grâce à la formule (2) :

$$\begin{aligned} C'_1 &= -\frac{1}{4} C_0 \partial^2 \\ C'_2 &= \frac{1}{32} C_0 \partial^4 \\ C'_3 &= -\frac{1}{384} C_0 \partial^6 \\ C'_4 &= \frac{1}{6144} C_0 \partial^8 \\ C'_5 &= -\frac{1}{122880} C_0 \partial^{10} \\ C'_6 &= \frac{1}{2949120} C_0 \partial^{12}. \end{aligned}$$

On sait maintenant que le développement jusqu'à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
& C_0 u(0) + t^{-1} C_1'(u) + t^{-2} C_2'(u + tru) + t^{-3} C_3'(u + tru + \frac{t^2}{2} r^2 u) \\
& + t^{-4} C_4'(u + tru + \frac{t^2}{2} r^2 u) + t^{-5} C_5'(u + tru + \frac{t^2}{2} r^2 u + \frac{t^3}{6} r^3 u) \\
& + t^{-6} C_6'(u + tru + \frac{t^2}{2} r^2 u + \frac{t^3}{6} r^3 u + \frac{t^4}{24} r^4 u) \\
& + t^{-7} C_7'(u + tru + \frac{t^2}{2} r^2 u + \frac{t^3}{6} r^3 u + \frac{t^4}{24} r^4 u) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Ici, on tronque à chaque fois le développement de l'exponentielle pour ne garder que les termes qui contribuent, et on réalise le développement en phase stationnaire jusqu'à ce que la compensation des puissances de t ne crée que des puissances supérieures à deux. Comme on le voit, en pratique, il est nécessaire d'aller loin dans le développement, rendant les calculs pénibles.

On peut ensuite estimer chaque terme, en ne gardant que les grandes puissances de t :

$$\begin{aligned}
t^{-2} C_2'(u + tru) / C_0 &= \frac{t^{-2}}{32} u^{(4)}(0) + \frac{3t^{-1}}{16} u'(0) + \frac{3t^{-1}}{4} u(0) \\
t^{-3} C_3'(tru + \frac{t^2}{2} r^2 u) / C_0 &= -\frac{t^{-2}}{64} u^{(3)}(0) - \frac{t^{-2}}{16} u^{(2)}(0) - \frac{15t^{-1}}{16} u(0) \\
t^{-4} C_4'(\frac{t^2}{2} r^2 u) / C_0 &= \frac{15t^{-2}}{256} u^{(2)}(0) + \frac{105t^{-2}}{128} u'(0) + \frac{105t^{-2}}{32} u(0) \\
t^{-5} C_5'(\frac{t^3}{6} r^3 u) / C_0 &= -\frac{63t^{-2}}{128} u'(0) - \frac{945t^{-2}}{64} u(0) \\
t^{-6} C_6'(\frac{t^4}{24} r^4 u) / C_0 &= \frac{3465t^{-2}}{512} u(0).
\end{aligned}$$

Finalement on peut conclure :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2i}} \left(-\frac{1}{4} \partial^2 + \frac{3}{16} \partial - \frac{3}{16} \right) \\
C_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{2i}} \left(\frac{1}{32} \partial^4 - \frac{1}{64} \partial^3 - \frac{1}{256} \partial^2 + \frac{21}{64} \partial - \frac{2415}{512} \right).
\end{aligned}$$

1.1.3 Classes d'intégrales à phases

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n et Γ un cône ouvert de $X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, on veut étudier des *intégrales à phase* sur Γ . Pour cela on introduit les définitions suivantes :

Définition 1.6. Une fonction $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$ est appelée *phase* lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

1. φ est 1-homogène par rapport à la seconde variable ;
2. Sur Γ , on a $\text{Im} \varphi \geq 0$;
3. La forme $d\varphi$ ne s'annule pas.

Cette définition va nous permettre d'appliquer les outils techniques développés précédemment.

Définition 1.7 (Classes de symboles). Soient $m \in \mathbb{R}$ et deux paramètres $\rho \in]0, 1]$, $\delta \in [0, 1[$. Pour Γ un cône de $X \times \mathbb{R}^d$, l'espace $S_{\rho, \delta}^m(\Gamma)$ est défini comme le sous-ensemble des $a \in C^\infty(\Gamma)$ vérifiant que, pour tout $K \subset\subset X$, pour tous multi-indices α, β , il existe une constante C telle que sur tout $\Gamma \cap (K \times \mathbb{R}^d)$, on ait

$$|\partial_x^\beta \partial_\theta^\alpha a(x, \theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{m + \delta|\beta| - \rho|\alpha|}.$$

Ce sous-ensemble forme bien un espace vectoriel, et les constantes optimales dans l'équation précédente forment un espace de Fréchet.

On notera $S^m(\Gamma) = S_{1,0}^m(\Gamma)$, et encore

$$S_{\rho, \delta}^{+\infty} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S_{\rho, \delta}^m$$

$$S_{\rho, \delta}^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} S_{\rho, \delta}^m.$$

Les symboles sont donc des fonctions dont le comportement en l'infini en fonction de θ ressemble à celui des fractions rationnelles. Les espaces $S_{\rho, \delta}^m$ sont croissants avec m et δ et décroissants avec ρ .

Par exemple, les fonctions m -positivement homogènes en θ sont dans S^m .

On peut alors adapter le lemme de Borel à cette situation :

Lemme 1.8. Soit $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in]0, 1]$, $\delta \in [0, 1[$, et (a_j) une suite de fonctions dans $C^\infty(\Gamma)$ telle que, pour tout j , $a_j \in S_{\rho, \delta}^{m-j}(\Gamma)$. Alors il existe $a \in S_{\rho, \delta}^m(\Gamma)$ tel que, pour tout entier K , on a $a - \sum_{j=0}^K a_j \in S_{\rho, \delta}^{m-K-1}(\Gamma)$.

La fonction a est unique modulo $S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Gamma)$, et on écrit :

$$a \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j. \quad (3)$$

Ce lemme amène à la notion de symbole classique :

Définition 1.9. On dit que a est un symbole classique, et on écrit $a \in S_{clas}^m(\Gamma)$, lorsque a s'écrit sous la forme (3) avec $a_j \in S^{m-j}(\Gamma)$ (donc $\rho = 1$, $\delta = 0$), et a_j homogène de degré $m - j$ en ξ .

Une autre caractéristique topologique des $S_{\rho,\delta}^m$ sera très utile : la densité de $C_c^\infty(\Gamma)$.

Ainsi, par le théorème de Hahn-Banach, pour définir une opération linéaire sur $S_{\rho,\delta}^m$, il suffit de la définir sur $C_c^\infty(\Gamma)$ puis de vérifier que la définition est continue par rapport à la topologie de $S_{\rho,\delta}^m(\Gamma)$.

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.10. Soit φ une phase sur le cône ouvert Γ et F un cône fermé inclus dans Γ . Soit $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in]0, 1]$, $\delta \in [0, 1[$. Alors la fonctionnelle qui à $a \in C_c^\infty(\mathring{F})$ associe

$$I_\varphi(a) : u \in C_c^\infty(X) \mapsto \int_\Gamma e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta \quad (4)$$

est continue pour la topologie $S_{\rho,\delta}^m$ à valeurs dans l'espace des distributions d'ordre strictement plus grand que $\frac{d+m}{\min(\rho, 1-\delta)}$.

Démonstration. La démonstration originale, dans [Hör71], utilise des intégrations par parties, mais ici on va pouvoir utiliser directement le lemme de phase non stationnaire, comme dans [Hör03].

On commence par une décomposition dyadique de l'espace des phases. On pose χ_0 une fonction lisse sur \mathbb{R}^d qui vaut 1 lorsque $|\theta| \leq 1$ et qui vaut 0 lorsque $|\theta| \geq 2$. On définit alors, pour $\nu > 0$:

$$\chi_\nu(\theta) = \chi(2^{-\nu}\theta) - \chi(2^{1-\nu}\theta).$$

Les χ_ν forment alors une partition parafinie de l'unité. Par ailleurs on a, pour une constante C indépendante de ν :

$$|\partial^\alpha \chi_\nu(\theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{-|\alpha|}.$$

Cette décomposition est donc adaptée à notre problème puisque pour $a \in S_{\rho,\delta}^m$, et pour K, α, β , il existe une constante C telle que pour tout ν ,

$$|\partial_x^\beta \partial_\theta^\alpha \chi_\nu(\theta) a(x,\theta)| \leq C(1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Et en particulier, si $\gamma = \max(1 - \rho, \delta) < 1$, on a une constante C indépendante de ν telle que si $x \in K$ et $|\theta| \in]1/2, 2[$, on a :

$$|\partial_{x\theta}^\alpha a(x, 2^\nu \theta)| \leq C 2^{\nu(m + \gamma|\alpha|)}.$$

Or, pour $\nu \geq 0$, on peut écrire, par changement de variables

$$I_\varphi(\chi_{\nu+1} a)(u) = 2^{d\nu} \int e^{i2^\nu \varphi(x, \theta)} \chi_1(\theta) a(x, 2^\nu \theta) u(x) dx d\theta.$$

Et on applique alors le lemme de phase non stationnaire pour obtenir, avec C indépendant de ν :

$$|I_\varphi(\chi_{\nu+1} a)(u)| \leq C 2^{\nu(d + m - k(1 - \gamma))} \|u\|_{C^k(K)}.$$

Lorsque $k(1 - \gamma) > d + m$ et $k \geq 0$, on peut sommer ces estimations et obtenir que $I_\varphi(a)$ s'étend en une distribution d'ordre $-k$. Lorsque $k < 0$, on peut appliquer ce résultat en remplaçant u par $u\varphi$ et raisonner par dualité. Par ailleurs les estimations qui apparaissent ne font intervenir que les semi-normes de a dans $S_{\rho, \delta}^m$, d'où le résultat. \square

On peut alors définir des classes d'intégrales :

Définition 1.11. Lorsque φ est une phase sur Γ , avec $F \subset \Gamma$ un fermé conique, et m un réel, on note $\mathcal{I}_\varphi^m(F)$ l'espace des distributions qui peuvent s'écrire sous la forme (4), avec un $a \in S^m(\hat{F})$.

Proposition 1.12. Soit φ une phase et a un symbole. Alors la distribution $I_\varphi(a)$ définie par la formule (4) vérifie :

$$\text{sing supp } I_\varphi(a) \subset \{x \in X, \exists \theta, (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}.$$

Démonstration. Posons

$$S = \{x \in X, \exists \theta, (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}.$$

Pour x en-dehors de S , la fonction φ est une phase en θ qui dépend du paramètre x , pour lequel toutes les expressions à l'intérieur de l'intégrale évoluent de manière lisse. On peut donc répéter la preuve précédente en incorporant un paramètre lisse x et on obtient alors une dépendance lisse par rapport à x de l'intégrale à x fixé. \square

1.2 OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER À PHASE RÉELLE

1.2.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Nous commençons par l'étude d'un cas particulier d'opérateur à phase réelle, dont l'étude sera très utile.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y, \xi) &\mapsto \langle x - y, \xi \rangle \end{aligned}$$

est une phase réelle, au sens de la définition 1.6. En particulier, si $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, on peut définir la distribution

$$K_a(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x-y \rangle} a(x, \xi) d\xi.$$

On aimerait cependant travailler avec des opérateurs qui préservent la classe de Schwartz, et pour cela il est nécessaire de connaître le comportement des symboles en l'infini, en espace. Le lecteur désirant se reporter à [Hör07] prendra garde au fait que nous introduisons maintenant une notation différente, dans le but d'éviter la confusion avec les espaces de symboles définis précédemment.

Définition 1.13. On définit $S_{glob}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifiant que pour tous multiindices α et β , il existe une constante C telle qu'on ait :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Munis de cette définition globale, nous pouvons affirmer que :

Proposition 1.14. Si $a \in S_{glob}^m$, alors $K_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. En conjuguant par une transformée de Fourier en la seconde variable, il suffit de montrer que l'application suivante est continue pour la topologie $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

$$(u, v) \mapsto \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(x) v(\xi) dx d\xi.$$

Or on a immédiatement :

$$\begin{aligned} \left| \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(x) v(\xi) dx d\xi \right| &\leq C \int (1 + |\xi|)^m |u(x)| |v(\xi)| dx d\xi \\ &\leq C \|x^{-n-1} u\|_\infty \|\xi^{-n-1-m} v\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Par dualité, K_a induit un opérateur à noyau, noté $a(x, D)$, qui va de \mathcal{S} dans \mathcal{S}' . La notation $a(x, D)$ est justifiée par le fait que, si a ne dépend pas de ξ , alors $a(x, D)$ est l'opérateur de multiplication par $a(x)$, et si a ne dépend pas de x , alors $a(x, D)$ est l'opérateur de multiplication en Fourier.

Un calcul direct permet de montrer :

Lemme 1.15. Pour $a \in S_{glob}^m$ on a :

$$\begin{aligned} [a(x, D), x_j] &= -i \partial_{x_j} a(x, D) \\ [a(x, D), -i \partial_{x_j}] &= i \partial_{x_j} a(x, D). \end{aligned}$$

Corollaire 1.16. On a en fait $a(x, D) : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$. Par ailleurs l'application qui à a associe cet opérateur est continue pour la topologie de S_{glob}^m .

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{S}$. La fonction $x \mapsto a(x, D)u(x)$ est continue bornée, en tant qu'intégrale à paramètre convergeant absolument ; on ne fait intervenir par ailleurs qu'une des semi-normes de a dans S_{glob}^m .

Par le lemme précédent, pour contrôler les autres semi-normes dans \mathcal{S} de $a(x, D)u$, il suffit de contrôler les $\|\partial^\alpha a(x, D)u\|_\infty$, ce qui ne fait intervenir, encore une fois, que les semi-normes de a dans S_{glob}^m . \square

Par dualité (en changeant $K(x, y)$ en $\bar{K}(y, x)$), on peut définir $a(x, D) : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$.

On donne, pour terminer, un résultat concernant la régularité de l'opérateur $a(x, D)$ et de son noyau.

Proposition 1.17. Soit $a \in S_{glob}^m$. Le noyau K_a est lisse hors de la diagonale.

Démonstration. Lorsque $a \in C_c^\infty$, hors de la diagonale $x = y$, on peut réaliser des intégrations par parties dans l'intégrale qui définit K_a . Donc dans ce cas K_a est lisse, et quitte à faire suffisamment d'intégrations par parties, les semi-normes de K_a ne dépendent que des semi-normes de a dans S_{glob}^m , donc on peut raisonner par continuité, et le résultat reste valide pour a quelconque. \square

1.2.2 Opérations sur les opérateurs pseudo-différentiels

Nous cherchons ici à obtenir des règles de calcul sur les opérateurs pseudo-différentiels. Qu'arrive-t-il lorsqu'on essaie de composer deux opérateurs ? Ou de prendre l'adjoint d'un opérateur ?

On aurait très bien pu prendre une définition plus générale d'un opérateur pseudo-différentiel en laissant le symbole dépendre de la variable y . En fait, le noyau

$$K_r(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x-y \rangle} r(x, \xi, y) d\xi$$

est défini en tant qu'intégrale à phases, au sens de la section précédente, dès lors que $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$. Mais on dispose du lemme suivant :

Lemme 1.18. Soit $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$, à support compact en x et y . Alors il existe $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que $K_r = K_a$. Le symbole p admet par ailleurs le développement asymptotique suivant, au sens du lemme 1.8 :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}.$$

Démonstration. Procédons par dualité; soit φ une fonction test. On commence par voir que, à x et ξ fixés :

$$\begin{aligned} \int e^{-i\langle \xi, y \rangle} r(x, \xi, y) \varphi(y) dy &= \mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot) \varphi(\cdot))(\xi) \\ &= (\mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot)) * \hat{\varphi}(\cdot))(\xi). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à φ on trouve :

$$\begin{aligned} \int K_r(x, y) \varphi(y) dy &= \iint e^{i\langle \xi, x-y \rangle} r(x, \xi, y) \varphi(y) d\xi dy \\ &= \int e^{i\langle \xi, x \rangle} [\mathcal{F}(r(x, \xi, \cdot)) * \hat{\varphi}(\cdot)](\xi) d\xi \\ &= \iint \mathcal{F}_3(r)(x, \xi, \xi - \eta) e^{i\langle \xi - \eta, x \rangle} d\xi \hat{\varphi}(\eta) e^{i\langle \eta, x \rangle} d\eta \\ &= \iint e^{i\langle \eta, x-y \rangle} p(x, \eta) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Ici \mathcal{F}_3 désigne la transformée de Fourier en la troisième variable, et

$$p(x, \eta) = \int e^{i\langle \xi, x \rangle} \mathcal{F}_3 r(x, \xi + \eta, \xi) d\xi.$$

On a alors clairement $p \in S^m$. Par ailleurs, en développant $\mathcal{F}_3(r)(x, \xi + \eta, \xi)$ en série entière en la troisième variable, on trouve que p admet le développement asymptotique suivant, au sens de 1.8 :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}.$$

Ce qui permet de conclure. □

Lemme 1.19. Soit $r \in S_{glob}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et supposons qu'il existe un voisinage de $\text{diag}(\mathbb{R}^n)$ sur lequel, pour tout ξ , on ait $r(x, y, \xi) = 0$. Alors $K_r(x, y)$ est lisse.

Démonstration. On sait déjà que le noyau K_r est lisse hors de la diagonale, et il est nul au voisinage de la diagonale. □

Proposition 1.20. Pour tout symbole $r \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$, il existe un symbole $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que $K_r - K_p$ soit une fonction lisse, et admettant le développement asymptotique :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} r(x, \xi, y) \Big|_{y=x}.$$

Démonstration. Soit (χ_j) une partition parafinie de l'unité sur \mathbb{R}^n , alors on a bien sûr :

$$r(x, \xi, y) = \sum_{j,k} \chi_j(x) \chi_k(y) r(x, \xi, y).$$

On sait qu'on peut retrancher de cette somme les termes dont les supports sont loin de la diagonale, car leur contribution au noyau est lisse. On écrit $j \sim k$ lorsque $\text{supp } \chi_j \cap \text{supp } \chi_k \neq \emptyset$, on sait alors qu'à j fixé il n'existe qu'un nombre fini de k qui vérifient $j \sim k$, et on écrit alors :

$$r(x, \xi, y) = \sum_j \sum_{j \sim k} \chi_j(x) \chi_k(y) r(x, y, \xi).$$

A chacun des termes on applique le lemme, qui nous fournit des symboles $p_{j,k}$. On peut sans problème sommer sur le nombre fini d'indices k , en conservant le développement asymptotique, produisant des symboles p_j . Enfin, quitte à remplacer p_j par $\tilde{\chi}_j(x) p_j$ où $\tilde{\chi}_j$ vaut 1 sur $\text{supp } \chi_j$, ce qui ne change pas le développement asymptotique, on peut supposer que chaque p_j est à support compact, tel qu'en tout point seul un nombre fini de p_j soit non nul. On peut alors sommer les p_j , ce qui conclut la preuve. \square

De cette proposition on retiendra deux corollaires.

Corollaire 1.21. Modulo un opérateur à noyau C^{∞} , l'adjoint de $a(x, D)$, où $a \in S^m$, est l'opérateur associé à un symbole dans S^m dont le développement asymptotique est :

$$a^{\dagger}(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} \bar{a}(y, \xi) \Big|_{x=y}.$$

Corollaire 1.22. Modulo un opérateur régularisant, la composée $a(x, D) \circ b(x, D)$, où $a \in S_{glob}^m$, et $b \in S_{glob}^{m'}$, est l'opérateur associé à un symbole dans $S^{m+m'}$ dont le développement asymptotique est :

$$a \# b(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} [a(x, \xi) b(y, \xi)] \Big|_{x=y}. \quad (5)$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} b(x, D) \varphi(x) &\sim (b^{\dagger}(x, D))^* \varphi(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\int e^{-i\langle \xi, y \rangle} \varphi(y) \overline{b^{\dagger}(y, \xi)} dy \right) (x). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$a(x, D) \circ b(x, D)\varphi(x) \sim \iint e^{i\langle \xi, x-y \rangle} a(x, \xi) \overline{b^\dagger(y, \xi)} \varphi(y) dy d\xi,$$

ce qui permet de conclure, puisque le symbole total $a(x, \xi) \overline{b^\dagger(y, \xi)}$ est dans $S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$. \square

1.2.3 Front d'onde

Une fonction de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est dans C_0^∞ ssi sa transformée de Fourier décroît en l'infini plus vite que $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-n}$. Cela nous amène à poser, lorsque $u \in \mathcal{E}'$, le cône $\Sigma(u)$ des fréquences non nulles dont aucun voisinage conique ne voit \hat{u} décroître en l'infini plus vite que $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-n}$.

Le cône $\Sigma(u)$ donne des informations qui complètent celles du support singulier de u . L'un décrit uniquement les directions dans lesquelles on a des irrégularités, et l'autre uniquement les points où on a des irrégularités. Pour combiner ces informations on a besoin d'un lemme de localisation.

Lemme 1.23. Si $v \in \mathcal{E}'$ et $\phi \in C_0^\infty$, alors on a

$$\Sigma(v\phi) \subset \Sigma(v).$$

Démonstration. On veut regarder la décroissance en l'infini de la fonction

$$\xi \mapsto \int \hat{\phi}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta.$$

On sait déjà que pour un certain $m \in \mathbb{R}$ on a $|v(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^m$. Par ailleurs, soit $c \in]0, 1[$, on va découper cette intégrale en une intégrale là où $|\eta| \leq c|\xi|$ et une intégrale sur le complémentaire. On peut donc majorer l'expression précédente par

$$\sup_{|\xi - \eta| \leq c|\xi|} v(\eta) \|\hat{\phi}\|_{L^1} + C(c) \int_{|\eta| \leq c|\xi|} |\hat{\phi}(\eta)| (1 + |\eta|)^m d\eta.$$

Le second morceau ne pose donc pas de problème puisque $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$. Si on a un contrôle de la décroissance de \hat{v} dans un ouvert Γ , on peut considérer un cône fermé Γ_0 inclus dans Γ , et alors on dispose d'une constante c telle que $\xi \in \Gamma_0, |\xi - \eta| \leq c|\xi| \Rightarrow \eta \in \Gamma$, d'où le résultat. \square

Fort de ce lemme, on peut définir la notion de front d'onde en un point en localisant.

Définition 1.24. Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{\substack{\phi \in C_c^\infty \\ \phi(x) \neq 0}} \Sigma(u\phi).$$

On a immédiatement que $\Sigma_x(u) = \emptyset$ ssi il existe une fonction ϕ non nulle au voisinage de x telle que $u\phi$ soit une fonction lisse.

On peut alors conclure :

Définition 1.25. Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit :

$$\text{WF}(u) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \xi \in \Sigma_x(u)\}.$$

Cette notion est invariante par action d'un C^∞ -difféomorphisme sur $T^*(\mathbb{R}^d)$, et qu'à ce titre, la notion de front d'onde se généralise aux variétés en prenant des cartes locales.

On a par exemple la proposition suivante, que nous ne démontrons pas :

Proposition 1.26 ([Hör03], thm 8.1.9). Soit Γ un cône ouvert de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, ϕ une phase sur Γ , $F \subset \Gamma$ un cône fermé et $a \in S_{\rho, \delta}^m(F)$. Alors on a :

$$\text{WF}(I_\phi(a)) \subset \{(x, d_x\phi(x, \theta)), (x, \theta) \in F \text{ et } d_\theta\phi(x, \theta) = 0\}.$$

En particulier, on peut rendre plus précise la proposition 1.17 :

Corollaire 1.27. Soit $a \in S_{glob}^m$. Le noyau K_a vérifie :

$$\text{WF}(K_a) \subset \{(x, x, \xi, -\xi) \mid (x, \xi) \in \text{supp}(a), \xi \neq 0\}.$$

Le résultat précédent se reformule du point de vue de l'opérateur :

Proposition 1.28 (Principe microlocal). Soit $a \in S_{glob}^m$ et $u \in \mathcal{S}'$. Alors :

$$\text{WF}(a(x, D)u) \subset \text{WF}(u) \cap \text{supp}(a).$$

Corollaire 1.29 (Définition alternative du front d'onde). Soit $u \in \mathcal{S}'$. Alors le complémentaire de $\text{WF}(u)$ est constitué exactement des (x_0, ξ_0) tels qu'il existe un symbole a vérifiant :

$$\begin{cases} a(x_0, \xi_0) \neq 0 \\ a(x, D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que les ensembles dont on veut prouver l'égalité sont tous les deux coniques.

Par la proposition précédente, si un symbole a vérifie $\text{supp}(a) \cap \text{WF}(u) = \emptyset$ alors $a(x, D)u$ est lisse.

Réciproquement, si $(x_0, \xi_0) \in \text{WF}(u)$, soit ϕ une fonction test non nulle en x_0 . Supposons l'existence d'un voisinage conique Γ de ξ_0 sur lequel $\hat{\phi} * \hat{u}$ décroisse en l'infini plus vite que $(1 + |\xi|)^{-n}$. Soit χ une fonction 0-homogène qui approche l'indicatrice de Γ , alors la fonction suivante est lisse :

$$x \mapsto \int e^{i\langle \xi, x-y \rangle} \chi(\xi) \phi(y) u(y) dy.$$

Posons $a(x, \xi) = \phi(x)\chi(\xi)$. Alors on vient de montrer que $a^\dagger(x, D)u$ est lisse. Cependant, on sait que :

$$a^\dagger(x, \xi) \sim \phi(x)\chi(\xi) + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{i^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha \phi(x) \partial_\xi^\alpha \chi(\xi).$$

Puisque les termes suivants sont d'ordre plus petits, pour $\lambda > 0$ assez grand on a $a^\dagger(x_0, \lambda\xi_0) \neq 0$, ce qui permet de conclure. \square

1.2.4 Opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle

On va généraliser les constructions précédentes au cas d'une phase générale $\varphi(x, y, \theta) \in \mathbb{R}$. La formule :

$$I_\varphi(a)(x, y) = \int e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) d\theta \quad (6)$$

associe à un symbole un opérateur à noyau, dont on voudrait comprendre les propriétés.

Définition 1.30. Pour X et Y deux variétés, une fonction $\varphi \in C^\infty(X \times Y \times (\mathbb{R}^d \setminus 0), \mathbb{R})$ est appelée *phase réelle non dégénérée* lorsque :

- La fonction φ est 1-homogène en θ .
- Pour tout $x \in X$, la fonction $(y, \theta) \mapsto \varphi(x, y, \theta)$ n'a pas de point critique.
- Pour tout $y \in Y$, la fonction $(x, \theta) \mapsto \varphi(x, y, \theta)$ n'a pas de point critique.
- En un point γ où $d_\theta\varphi$ s'annule, les formes $d(\partial\varphi/\partial\theta_i)$ sont indépendantes.

La structure de front d'onde se généralise :

Définition 1.31 (Variété caractéristique). Soit φ une phase réelle non dégénérée sur $X \times Y \times \mathbb{R}^d$. On appelle variété caractéristique l'ensemble :

$$C_\varphi = \{(x, \xi, y, \eta) \in T^*X \times T^*Y, \exists \theta \in \mathbb{R}^d \setminus 0, \\ d_\theta\varphi(x, y, \theta) = 0, d_x\varphi(x, y, \theta) = \xi, d_y\varphi(x, y, \theta) = \eta\}.$$

Remarque 1.32. L'ensemble C_φ est bien une variété, à cause de la dernière condition de la définition.

La variété caractéristique est reliée au front d'onde du noyau. Nous admettrons la proposition suivante :

Proposition 1.33 ([Hör03], thm 8.1.9). Soit φ une phase réelle non dégénérée sur $X \times Y \times \mathbb{R}^d$, et $a \in S_{glob}^m(X \times Y \times \mathbb{R}^d)$.

Alors l'intégrale à noyau $I_\varphi(a)$ vérifie :

$$\text{WF}(I_\varphi(a)) \subset C_\varphi.$$

En particulier, appelons $a_\varphi(x, D)$ l'opérateur dont le noyau est $I_\varphi(a)$. Alors on a

$$\text{WF}(a_\varphi(x, D)u) \subset C_\varphi \text{WF}(u).$$

Ici, pour $E \subset Y$, on note :

$$C_\varphi E = \{x \in X, \exists y \in E, (x, y) \in E\}.$$

La régularité des opérateurs intégraux de Fourier est donc associée à leur variété caractéristique C_φ . Observons que C_φ est une sous-variété de dimension $n_X + n_Y$, de la variété symplectique $T^*X \times T^*Y$, de dimension $2(n_X + n_Y)$.

Lemme 1.34. La forme symplectique, restreinte à C_φ , est nulle.

Démonstration. Reportée au paragraphe suivant. □

On appelle *lagrangienne* une telle sous-variété.

1.2.5 Idéaux lagrangiens associés à une phase

Plutôt que de caractériser φ par sa variété caractéristique, on va lui associer un idéal de fonctions réelles, qui vérifie certaines propriétés. Les idéaux en question seront en bijection avec l'ensemble des variétés lagrangiennes (qui constituent l'ensemble de leurs points d'annulation), les deux notions sont complètement équivalentes pour des phases réelles. Cependant, les notions que nous allons définir maintenant se généralisent aux phases complexes, contrairement aux variétés caractéristiques.

Définition 1.35. Soit S une variété symplectique de dimension $2n$. Un idéal $J \subset C^\infty(S, \mathbb{R})$ est dit *lagrangien* lorsque :

- $\{J, J\} \subset J$.
- Localement, il existe une famille de n fonctions $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$, dont les différentielles sont linéairement indépendantes, vérifiant que pour toute fonction $u \in J$, il existe des fonctions lisses f_j telles que, localement $u = \sum f_j u_j$ (on dit alors que les u_i sont des générateurs locaux de J).
- Si une fonction u vérifie que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(S, \mathbb{R})$, on a $f u \in J$, alors $u \in J$.

Si les générateurs peuvent être choisis invariants par rapport à une action de \mathbb{R}^+ sur S , on dit que l'idéal lagrangien est conique.

Remarque 1.36. L'ensemble des points d'annulation d'un idéal lagrangien (conique) est une variété lagrangienne (conique). Réciproquement,

si on se donne une variété lagrangienne (conique) C , l'ensemble des fonctions qui s'annulent sur C constitue une variété lagrangienne (conique).

Définition 1.37 (idéal associé à une phase). Soit φ une phase réelle non dégénérée, on définit \widehat{J}_φ comme l'idéal de l'espace $C^\infty((T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0) \times (\mathbb{R}^d \setminus 0))$, engendré localement par les fonctions

$$\begin{aligned} a_k(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k} \\ b_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \xi_j \\ c_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} - \eta_j \end{aligned}$$

On définit alors $J_\varphi \subset C^\infty((T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0))$, idéal associé à φ , comme l'idéal des fonctions dans \widehat{J}_φ qui ne dépendent pas de θ .

Proposition 1.38. Si φ est une phase réelle non dégénérée, alors J_φ est lagrangien conique.

Démonstration. Pour des raisons de simplicité on se restreint au cas où la variable θ évolue dans un espace de dimension $d = 1$. Par ailleurs, on appelle n_X la dimension de X et n_Y la dimension de Y . Ainsi on note $\varphi(x, y, \theta) = \theta \varphi(x, y)$. L'idéal \widehat{J}_φ est alors engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} a(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \varphi(x, y) \\ b_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \xi_j \\ c_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} - \eta_j \end{aligned}$$

Soit un point (x, y) tel que $\varphi(x, y) \neq 0$. Sur la fibre au-dessus d'un voisinage local de ce point, \widehat{J}_φ a un générateur qui ne s'annule pas, donc vaut l'ensemble des fonctions lisses sur ce voisinage ; donc il en va de même pour J_φ .

Soit maintenant un point (x, y) tel que $\varphi(x, y) = 0$. Alors par non dégénérescence, il existe un indice k tel que $\partial\varphi/\partial x_k \neq 0$ au voisinage de (x, y) . J_φ est alors localement engendré par les $n_X + n_Y$ fonctions :

$$\begin{aligned} a(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \varphi(x, y) \\ b_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \xi_k - \xi_j \quad \text{pour } j \neq k \\ c_j(x, y, \xi, \eta, \theta) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \xi_k - \eta_j. \end{aligned}$$

Examinons le crochet de Poisson de deux de ces générateurs. En premier lieu,

$$\{a, b_j\} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0.$$

Et de même pour $\{a, c_j\}$. Secondement,

$$\begin{aligned} \{b_j, b'_j\} &= \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right) \xi_k - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right) \xi_k \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} \right) \xi_k + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} \right) \xi_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \xi_k - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} \xi_k \\ &\quad - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-2} \frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j} \xi_k + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^{-2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x'_j} \xi_k = 0. \end{aligned}$$

On peut vérifier que tous les crochets sont nuls. Ainsi, on a bien

$$\{J_\varphi, J_\varphi\} \subset J_\varphi.$$

Par ailleurs on vient de montrer que J était toujours localement engendré par $n_X + n_Y$ fonctions dont les différentielles sont indépendantes. Enfin, J_φ vérifie la condition de localisation par définition. \square

On a exactement $J_\varphi = \{f \in C^\infty, m \in C_\varphi \Rightarrow f(m) = 0\}$, où C_φ est la variété caractéristique de φ au sens de la définition 1.31. La raison pour laquelle nous avons donné une définition alternative de J_φ est la généralisation future à des phases complexes. On observe par ailleurs qu'on vient de démontrer que C_φ était lagrangienne.

Il existe un modèle local universel pour les idéaux lagrangiens coniques de $C^\infty(T^*Z \setminus 0)$:

Lemme 1.39. Soit Z une variété et J un idéal lagrangien conique de $C^\infty(T^*Z \setminus 0)$. Soit $m_0 \in T^*Z$, alors il existe un voisinage conique V de m_0 tel que :

1. Ou bien la restriction à V des fonctions dans J vaut tout l'espace : $J|_V = C^\infty(V)$.
2. Ou bien il existe des coordonnées locales (x_j, ξ_j) sur V et une fonction $H \in C^\infty(V)$, homogène de degré 0 et qui ne dépend que de ξ , telle que $J|_V$ est généré par les fonctions

$$x_j - \frac{\partial H}{\partial \xi_j}.$$

Le résultat suivant est la clef de voûte de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier du point de vue des idéaux lagrangiens :

Théorème 2 (Hormander). Soit φ une phase réelle non dégénérée sur $X \times Y \times (\mathbb{R}^d \setminus 0)$. Soit J_φ l'idéal lagrangien associé, et C_φ la variété caractéristique. Soit $\gamma_0 \in C_\varphi$. Soient V un voisinage conique de γ_0 et H une fonction qui paramètre J sur V au sens du lemme précédent ; soit $F \subset V$ un fermé conique. Soient enfin $a \in S^m(F)$ compact, et A l'intégrale de Fourier associée :

$$A(x, y) = \int e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) d\theta.$$

Alors il existe deux symboles $v, v_0 \in S^{m+(d-n_X-n_Y)/2}(\emptyset \times \mathbb{R}^{n_X+n_Y})$, tels que $v - v_0 \in S^{m+(d-n_X-n_Y)/2-1}$, tels que

$$A(x, y) - \int e^{i(\langle x, \xi \rangle - \langle y, \eta \rangle - H(\xi, \eta))} v(\xi, \eta) d\xi d\eta \in C^\infty$$

$$(2\pi)^{(n_X+n_Y)/2} v_0(\xi, \eta) - (2\pi)^{d/2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \operatorname{Hess} \varphi(\gamma_0)}}{\sqrt{\det \operatorname{Hess} \varphi(\gamma_0)}} a(x, y, \theta) \in \widehat{J}_\varphi.$$

La preuve repose sur l'utilisation du premier terme du lemme de phase stationnaire. On peut en réalité donner une description de v modulo $S^{m+(d-n_X-n_Y)/2-k} \oplus \widehat{J}_\varphi^k$, pour tout entier k , en examinant les termes suivants de la phase stationnaire.

Corollaire 1.40. Deux phases ayant le même idéal lagrangien donnent le même ensemble d'opérateurs intégraux de Fourier.

1.2.6 Composition des opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle

Par le théorème précédent, pour décrire comment se comporte la composition de deux opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle, il suffit d'observer comment la composition modifie les idéaux.

On considère trois variétés X, Y, Z et deux OIF réels, A qui envoie une fonction sur Y en une fonction sur X , et B qui envoie une fonction sur Z en une fonction sur Y . On applique le théorème précédent, et on décompose X, Y et Z en petits ouverts sur lesquels :

$$A(x, y) = \int e^{i(\langle x, \xi \rangle - \langle y, \eta \rangle - H_A(\xi, \eta))} a(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$B(y, z) = \int e^{i(\langle y, \eta \rangle - \langle z, \zeta \rangle - H_B(\eta, \zeta))} b(\eta, \zeta) d\eta d\zeta$$

L'opérateur $A \circ B$ est donc un opérateur à noyau, et son noyau est la convolution des noyaux précédents. On observe que $A \circ B$ s'exprime formellement comme un OIF, associé à :

$$\Psi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \langle x, \xi \rangle - \langle z, \zeta \rangle - H_A(\xi, \eta) - H_B(\eta, \zeta) \quad (7)$$

Cette fonction est-elle une phase ? Il faut vérifier d'une part qu'à x fixé, ou z fixé, il n'y a pas de point critique, mais c'est le cas (parce que $d_z \Psi$ n'est jamais nul.) D'autre part, soit γ un point en lequel $d_\xi \varphi = 0$, $d_\zeta \varphi = 0$, $d_\eta \varphi = 0$. Il faut vérifier que les formes suivantes sont indépendantes en γ :

$$d(x_i - \partial H_1 / \partial \xi_i) = dx_i - d(\partial H_1 / \partial \xi_i)$$

$$d(z_i - \partial H_2 / \partial \zeta_i) = dz_i - d(\partial H_2 / \partial \zeta_i)$$

$$d(\partial H_1 / \partial \eta_i + \partial H_2 / \partial \eta_i)$$

Il faut et suffit que les formes $d(\partial H_1 / \partial \eta_i + \partial H_2 / \partial \eta_i)$ soient indépendantes entre elles. Cette condition, qui est générique, sera supposée à partir de maintenant pour pouvoir continuer nos constructions.

Quelle est l'idéal \widehat{J}_ψ ? C'est un idéal de $C^\infty((T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0) \times (T^*Z \setminus 0))$, localement engendré par les fonctions :

$$x_i - d_{\xi_i} H_A$$

$$z_i - d_{\zeta_i} H_B$$

$$d_{\eta_i} H_A + d_{\eta_i} H_B$$

On peut en fait retrouver \widehat{J}_ψ à partir de \widehat{J}_A et \widehat{J}_B , de manière purement géométrique. Considérons l'idéal $\widehat{J}_A \otimes C^\infty((T^*Y \setminus 0) \times (T^*Z \setminus 0)) \oplus C^\infty((T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)) \oplus \widehat{J}_B$. C'est l'idéal engendré par les fonctions :

$$x_i - d_{\xi_i} H_A$$

$$z_i - d_{\zeta_i} H_B$$

$$y_i - d_{\eta_i} H_A$$

$$y'_i - d_{\eta'_i} H_B$$

Considérons maintenant l'idéal des restrictions à $(T^*X \setminus 0) \times \text{diag}(T^*Y \setminus 0) \times (T^*Z \setminus 0)$ des fonctions dans l'idéal précédent. Cet idéal est lui-même engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} x_i - d_{\xi_i} H_A \\ z_i - d_{\zeta_i} H_B \\ y_i - d_{\eta_i} H_A \\ d_{\eta_i} H_A + d_{\eta_i} H_B. \end{aligned}$$

Le sous-idéal des fonctions qui ne dépendent pas de y est donc exactement \widehat{J}_ψ .

On peut donc construire l'idéal associé à la composition de deux OIF, à partir de la donnée des idéaux des OIF en question. Cette opération complexe sera abrégée $J_A \circ J_B$ dans toute la suite de ce mémoire.

Remarque 1.41. Lorsque les symboles a et b sont classiques, et puisque $\eta \mapsto H_A(\xi, \eta) + H_B(\eta, \zeta)$ n'a que des points critiques non dégénérés, le lemme de phase stationnaire permet d'obtenir un développement asymptotique du symbole de la composition, pour la phase qu'on vient d'utiliser. On peut ensuite changer de phase en utilisant le théorème.

1.2.7 Opérateurs régularisants et équivalence

Lorsqu'on manipule des Opérateurs Intégraux de Fourier, il est commode de raisonner modulo une certaine classe d'opérateurs. On peut par exemple raisonner modulo l'ensemble des opérateurs qu'on peut définir par un symbole d'ordre donné. Mais lorsqu'on effectue des développements asymptotiques, on a envie de comparer des opérateurs "à l'ordre infini". Il existe a priori quatre manières différentes de le faire, de la plus vague à la plus précise. Soit A un OIF d'ordre m , envisageons les cas de figure suivants :

1. Il existe un opérateur B tel que $A - B$ est d'ordre $-\infty$ (c'est-à-dire, est un OIF associé à un symbole dans $S^{-\infty}$).
2. Il existe un opérateur B tel que pour tout entier k , $A - B$ est d'ordre $m - k$.
3. Il existe une suite d'opérateurs $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout k , $A - A_k$ est d'ordre $m - k$.
4. Il existe un opérateur B tel que $A - B$ se prolonge en un opérateur régularisant, c'est-à-dire continu de \mathcal{D}' dans \mathcal{D} .
5. Il existe un opérateur B tel que $A - B$ se prolonge en un opérateur qui est continu de C^0 dans \mathcal{D} .

On a alors naturellement que 1 implique 2 implique 3 et 4 implique 5. Supposons dorénavant que les variétés de départ et d'arrivée soient

compactes (ce qui sera vrai dans toutes les applications). Alors les conditions 4 et 5 sont équivalentes car toute distribution a un ordre.

En outre, si d est la dimension de l'espace des θ , un OIF d'ordre $-d - k$ est continu de C^0 dans C^k ; on en déduit que 3 implique 5.

Par ailleurs, 3 implique 2. Supposons en effet la condition 3, et soit b_0 le symbole de A_0 ; il n'est pas forcément d'ordre m . Cependant, si pour $k = 0$, on note b_k le symbole de $A_k - A_{k-1}$, on a que a_k est d'ordre $m - k$. On peut appliquer le lemme de Borel, et il existe un symbole b tel que pour tout entier K , on ait $b - \sum_{j=0}^K b_j \in S^{m-K-1}$. si B est l'opérateur associé à b , alors $A - B = A - A_k + A_k - B$ est un OIF d'ordre $m - k$ pour tout k .

Il existe donc deux sens possibles à l'écriture $A \sim B$, le premier étant que ces opérateurs sont égaux à tous les ordres, le second étant que la différence entre ces opérateurs est un opérateur dont le symbole est dans $S^{-\infty}$. Ces deux sens impliquent tous deux que la différence des opérateurs est un opérateur régularisant. Par la suite, on précisera toujours de quelle relation d'équivalence on parle.

1.3 OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER À PHASE COMPLEXE

1.3.1 Définitions

Dans cette section, on va développer la théorie des OIF à phase complexe, de manière très similaire aux OIF à phase réelle. Ceci est permis par la construction qu'on a réalisée en passant par les idéaux lagrangiens. De nombreuses constructions données ici ne seront que des reprises des constructions de la section précédente.

On commence par définir une phase positive non dégénérée :

Définition 1.42. Soient X et Y deux variétés. Une fonction $\varphi \in C^\infty(X \times Y \times (\mathbb{R}^d \setminus 0))$ est appelée *phase positive non dégénérée* lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\text{Im} \varphi \geq 0$;
- à x fixé, la fonction $(y, \theta) \mapsto \varphi(x, y, \theta)$ n'a pas de point critique;
- à y fixé, la fonction $(x, \theta) \mapsto \varphi(x, y, \theta)$ n'a pas de point critique;
- En un point γ en $d_\theta \varphi$ s'annule, les formes $d(\partial \varphi / \partial \theta_i)$ sont indépendantes (sur \mathbb{C}).

Une telle phase permet de construire des OIF à phase complexe en tant qu'opérateurs à noyau, comme précédemment.

On constate d'emblée que les considérations de la section précédente sur la variété caractéristique deviennent caduques. En effet, l'ensemble :

$$C_\varphi = \{(x, \xi, y, \eta) \in T^*X \times T^*Y, \exists \theta \in \mathbb{R}^d \setminus 0, \\ d_\theta \varphi(x, y, \theta) = 0, d_x \varphi(x, y, \theta) = \xi, d_y \varphi(x, y, \theta) = \eta\}$$

n'est plus une variété lagrangienne parce qu'il y a "trop d'équations". Pour remédier à cela, on peut complexifier localement les variétés, et décrire C_φ comme l'ensemble des points réels d'une variété complexe, comme dans [MS75], ou bien on peut continuer à raisonner avec les idéaux lagrangiens. C'est ce que nous allons faire, en suivant à nouveau [Hör85].

1.3.2 Idéaux lagrangiens positifs

On peut répéter les arguments précédents en faisant attention à la positivité. On définit premièrement un idéal lagrangien complexe de la manière suivante :

Définition 1.43. Soit S une variété symplectique de dimension $2n$. Un idéal $J \subset C^\infty(S, \mathbb{C})$ est dit *lagrangien* lorsque :

- $\{J, J\} \subset J$.
- Localement, il existe n générateurs de J , dont les différentielles sont \mathbb{C} -linéairement indépendantes sur J .
- Si une fonction u vérifie que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(S, \mathbb{C})$, on a $fu \in J$, alors $u \in J$.

Si les générateurs peuvent être choisis invariants par rapport à une action de \mathbb{R}^+ sur S , on dit que l'idéal lagrangien est conique.

Une phase positive non dégénérée φ engendre un idéal lagrangien J_φ par les constructions identiques au cas réel.

Réciproquement, tous les idéaux lagrangiens coniques complexes sont-ils engendrés par une phase positive ? Pas nécessairement, car on n'a pas encodé la positivité. Clairement, si un idéal J est engendré par une phase positive φ , alors l'idéal \bar{J} des conjuguées des fonctions dans J , est par exemple engendré par la phase $\bar{\varphi}$, qui n'est pas positive en général.

Définition 1.44. On dit qu'un idéal lagrangien est *positif* lorsqu'il est engendré par une phase positive.

On dispose comme dans le cas réel d'un modèle local universel pour ces idéaux :

Lemme 1.45. Soit Z une variété et J un idéal lagrangien conique de $C^\infty(T^*Z \setminus 0, \mathbb{C})$. Soit $m_0 \in T^*Z$, alors il existe un voisinage conique V de m_0 tel que :

1. Ou bien la restriction à V des fonctions dans J vaut tout l'espace : $J|_V = C^\infty(V)$.
2. Ou bien il existe des coordonnées locales (x_j, ξ_j) sur V et une fonction $H \in C^\infty(V)$, homogène de degré 0, qui ne dépend que de ξ , et telle que $\text{Im}H \leq 0$, telle que $J|_V$ est généré par les fonctions

$$x_j - \frac{\partial H}{\partial \xi_j}.$$

On peut alors généraliser les énoncés du théorème de changement de phase et du théorème de composition.

En particulier, remarquons que l'adjoint d'un opérateur associé à la phase φ (d'idéal J) est un opérateur associé à la phase $-\bar{\varphi}$. En échangeant les places de x et y dans la définition, $-\bar{\varphi}$ engendre un idéal qu'on notera J^* . En particulier, se demander si un OIF est un projecteur orthogonal n'a donc de sens que si $J = J^* = J \circ J$.

PROJECTEUR DE SZEGO

2.1 ESPACE DE HARDY

Soit D un ouvert connexe relativement compact de \mathbb{C} , dont la frontière ∂D est une sous-variété C^∞ . On dispose d'une notion de trace $W^{2,s}(D) \rightarrow L^2(\partial D)$ pour $s > 1/2$. On souhaite utiliser les propriétés de régularité des fonctions holomorphes, ou harmoniques, pour définir une notion de trace depuis un sous-espace $H^2(D)$ de fonctions holomorphes. C'est cet espace qu'on appellera *espace de Hardy*, et dont on étudiera par la suite l'image par l'application trace.

2.1.1 Un exemple : le disque unité du plan complexe

Dans Δ , le disque unité de \mathbb{C} , de frontière S^1 , les fonctions holomorphes sont très bien caractérisées par leur développement en série entière en 0. Cependant, notre but est de généraliser les notions qu'on va définir à d'autres ouverts ; on s'efforcera donc d'oublier cette écriture, et on utilisera plutôt le noyau de Poisson $P : S^1 \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$, qui s'écrit :

$$P(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} \quad (8)$$

On sera amené à noter également P l'opérateur associé, qui résout le problème de Dirichlet sur le disque.

Définition

Proposition 2.1. Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe. Pour $r < 1$ on définit $f_r : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sup_{r < 1} \|f_r\|_{L^2} < +\infty$;
2. il existe $f^* \in L^2(S^1)$ vérifiant, pour tout z ,

$$f(z) = \int_{S^1} P(z, e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta}) d\theta ;$$

3. il existe $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, harmonique, vérifiant $|f|^2 \leq h$.

Preuve :

- 1 \Rightarrow 2 utilise des résultats de convergence faible. Il existe en effet une sous-suite $(r_k) \rightarrow 1$ et $f^* \in L^2(S^1)$ telles que $f_{r_k} \rightharpoonup f^*$. En évaluant cette convergence contre $P(z, \cdot)$, on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$\int P(z, e^{i\theta}) f_{r_k}(e^{i\theta}) d\theta \rightarrow \int P(z, e^{i\theta}) f^*(e^{i\theta}) d\theta.$$

Or le terme de gauche s'interprète comme l'expression d'une fonction holomorphe dans le disque selon sa valeur au bord, f_{r_k} . Par unicité, cette fonction n'est autre que $z \mapsto f(r_k z)$. Donc le membre de gauche vaut $f(r_k z)$, et cette quantité converge vers $f(z)$, d'où l'égalité.

- 2 \Rightarrow 3 utilise simplement l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f|^2(z) &\leq \left| \int P(z, e^{i\theta}) d\theta \right| \left| \int P(z, e^{i\theta}) |f^*|^2(e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &= \int P(z, e^{i\theta}) |f^*|^2(e^{i\theta}) d\theta =: h(x) \end{aligned}$$

- 3 \Rightarrow 1 utilise à nouveau les propriétés du noyau de Poisson : avec $r_1 < 1$, et $r < 1$, on a, par la formule de Poisson pour $h(r_1 \cdot)$, sur $\bar{\Delta}$,

$$h(r_1 r e^{i\alpha}) = \int P(r e^{i\alpha}, e^{i\theta}) h(r_1 e^{i\theta}) d\theta$$

En notant $C_r = \inf\{P(x, y), y \in S^1, |x| \leq r\} > 0$, on a donc

$$|f_{r_1}|_{L^2}^2 \leq \int h(r_1 e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{C_r} \sup\{h(x), |x| \leq r\}$$

r et r_1 étant indépendants, on a bien un contrôle uniforme de $|f_{r_1}|_{L^2}$.

On pose $H^2(\Delta)$, l'espace de Hardy, comme étant l'espace des fonctions holomorphes sur Δ vérifiant les trois conditions équivalentes de la proposition. La condition 1 implique que $H^2(\Delta) \subset L^2(\Delta)$.

Par ailleurs, la formule de Poisson nous donne que la norme L^2 de f^* est proportionnelle à la norme L^2 de $f \in H^2$. Ceci nous permet de compléter notre desideratum, à savoir une application trace correctement définie sur H^2 .

Cette trace permet de démontrer que H^2 est fermé pour la norme L^2 . Le schéma de démonstration de cette affirmation est le suivant : si une suite (f_n) de fonctions de H^2 converge dans L^2 vers une fonction f , alors elle est en particulier L^2 -bornée, donc la suite f_n^* est L^2 -bornée. Il existe donc une sous-suite, que nous appellerons toujours f_n^* par commodité, qui converge faiblement vers une fonction dans $L^2(S^1)$ que nous appelons innocemment f^* . Par définition de la convergence faible, on a $P(f_n^*) \rightarrow P(f^*)$ ponctuellement, mais $P(f_n^*) = f_n$ qui converge presque partout vers f . Donc $f = P(f^*)$, ce qui est la condition 2 de la proposition.

Convergence sectorielle ou radiale

Les fonctions dans H^2 vérifient certaines propriétés de régularité au bord, notamment la convergence sectorielle. Commençons par définir, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, un secteur du disque Δ , dans lequel l'angle d'approche de $e^{i\theta}$ n'est pas trop grand :

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \{z \in \Delta, |z - e^{i\theta}| \leq \alpha(1 - |z|)\}$$

On a alors :

Proposition 2.2. Soit $\alpha > 1$ et $f \in H^2(\Delta)$, alors on a, pour presque tout point $e^{i\theta}$ du bord,

$$\lim_{x \rightarrow e^{i\theta}, x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} f(x) = f^*(e^{i\theta})$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin des fonctions maximales de Hardy-Littlewood. Pour M une variété riemannienne (on n'utilisera que \mathbb{R}^d et S^1), $g \in L^1_{loc}(M)$, on définit :

$$Mg(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g|. \quad (9)$$

M est clairement continue de L^∞ dans L^∞ , mais pas forcément de L^1 dans L^1 ; cependant, en vertu de l'inégalité de Markov, M est continue de L^1 dans L^1 faible ; par les théorèmes classiques d'interpolation, M est continue de L^p dans L^p pour tout $p > 1$.

On va avoir besoin d'un lemme pénible, qui se trouve exposé dans [Ste72] :

Lemme 2.3. On fixe $\alpha > 1$. Alors il existe une constante C_α telle que pour tout $f \in L^1(S^1)$, on a :

$$\sup_{x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} \int_{S^1} P(x, e^{iv}) g(e^{iv}) dv \leq C_\alpha Mg(e^{i\theta})$$

A l'aide de ce lemme, on peut démontrer la proposition.

Soit $\alpha > 1$ et $f \in H^2(\Delta)$. On sait que $f^* \in L^2(X)$ vérifie $f = Pf^*$. Soit $\epsilon > 0$, et posons :

$$\Lambda_\epsilon := \{e^{i\theta} \in S^1, \limsup_{x \rightarrow e^{i\theta}, x \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |f(x) - f^*(e^{i\theta})| \geq \epsilon\}$$

Les ensembles Λ_ϵ sont alors décroissants avec ϵ , et on cherche à démontrer que l'union de ces ensembles quand $\epsilon \rightarrow 0$ est de mesure nulle, il suffit donc d'avoir :

$$|\Lambda_\epsilon| = O(\epsilon).$$

Soit donc $g \in C^\infty(S^1)$ telle que $\|f^* - g\|_{L^2} < \epsilon^2$. On décompose alors :

$$|f(x) - f^*(e^{i\theta})| \leq |P(f^* - g)(x)| + |Pg(x) - g(e^{i\theta})| + |g(e^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|$$

Le troisième terme se traite directement à l'aide de l'inégalité de Markov. Le deuxième terme a une contribution nulle par continuité de Pg jusqu'au bord. La contribution du premier terme à Λ_ϵ se traite grâce au lemme :

$$\begin{aligned} |\Lambda_\epsilon| &\leq |e^{i\theta}, \epsilon/3 \leq C_\alpha M(f^* - g)(e^{i\theta})| \\ &\leq 3C_\alpha \epsilon^{-1} \|M(f^* - g)\|_{L^1} \\ &\leq C\epsilon^{-1} \|f^* - g\|_{L^2} \\ &\leq C\epsilon \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.

2.1.2 Le cas plus général

On désire étendre la définition des espaces de Hardy à des cas plus généraux. On considère D un ouvert relativement compact et fortement pseudoconvexe de \mathbb{C}^n , à bord lisse X ; on va alors pouvoir appliquer le théorème de Kohn, exposé dans l'annexe. On appelle espace de Hardy l'espace $H^2(X)$, et P l'opérateur inverse de la trace.

Comme l'application

$$\begin{aligned} H^2(D) \times D &\mapsto \mathbb{C} \\ (f, x) &\mapsto Pf(x) \end{aligned}$$

est continue par holomorphie (la valeur en un point vaut la valeur moyenne sur une petite boule, laquelle est continue pour la topologie L^2), on dispose en particulier d'une application continue $f \rightarrow Pf(x)$ dans $H^2(D)$. Par le théorème de Riesz, cette forme linéaire est associée à une fonction $K_x \in H^2(D)$. Posons $K(x, y) = \overline{K_x(y)}$. C'est une fonction antisymétrique, holomorphe par rapport à sa première variable. Par les constructions précédentes, on peut conjuguer par l'opérateur trace et obtenir une fonction $S(x, y)$. On aura besoin, de manière cruciale, du lemme suivant :

Lemme 2.4. Si $\{e_i\}$ est une base hilbertienne de $H^2(X)$, alors on a $S(x, y) = \sum e_i(x) \overline{e_i(y)}$.

Preuve : On a $S_x(y) = \sum \lambda_i(x) e_i(y)$, puis par définition de S_x , $\lambda_i(x) = \overline{e_i(x)}$.

On appelle noyau de Szegő la fonction S .

Un exemple : le cas de la boule unité

On sait que la boule unité de \mathbb{C}^n est fortement pseudoconvexe.

Lemme 2.5. Les fonctions $z \mapsto z^\alpha$, où α parcourt tous les poly-indices, forment une base orthogonale de $H^2(B(0,1))$, et leurs restrictions forment une base orthogonale de $H^2(S^{2n-1})$.

Démonstration. Ces fonctions sont clairement orthogonales sur chaque sphère centrée en l'origine. De plus, toute fonction holomorphe dans $B(0,1)$ est développable en série entière sur cet ouvert, d'où la propriété de base orthogonale. Par l'application du théorème 9, leur restriction à la sphère unité forment une base orthogonale. \square

Lemme 2.6. En notant $1 = (1, 0, \dots, 0)$, on a

$$S(z, 1) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z_1)^n}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} S(z, 1) &= \sum_{\alpha} \frac{z^\alpha \cdot 1^\alpha}{\|z^\alpha\|_{L^2(S)}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{\|z_1^k\|_{L^2(S)}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^n} \frac{z_1^k (k+n-1)!}{k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z_1^k \binom{k+n-1}{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z_1)^n}. \end{aligned}$$

\square

On en déduit, par invariance par rotation, la forme générale suivante :

Proposition 2.7. Sur la sphère unité de \mathbb{C}^n , on a :

$$S(z, w) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1-z \cdot \bar{w})}$$

2.2 STRUCTURE DU PROJECTEUR DE SZEGO

Dans le cas d'un ouvert fortement pseudoconvexe relativement compact, les résultats de régularité de [Koh63], [Koh64] ont une conséquence importante : le projecteur de Szegő a une structure microlocale

bien précise. En suivant la méthode originelle de Boutet et Sjöstrand, on se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 (Boutet-Sjöstrand). Soit X le bord d'un ouvert fortement pseudoconvexe et relativement compact d'une variété de dimension n . Alors le projecteur de Szegő S sur X vérifie $S \sim S'$ (au sens le plus fort), où $S' = (S')^* \sim (S')^2$ vérifie :

$$S'(x, y) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{it\phi(x, y)} \sum_{k \geq 0} t^{n-1-k} \chi(t) a_k(x, y) dt,$$

où ϕ est une phase convenable, et où χ est une fonction lisse, nulle au voisinage de 0, et valant 1 au voisinage de l'infini.

On remarque immédiatement que le choix de χ n'a aucune influence sur la classe d'équivalence de S' modulo opérateurs à noyau lisse ; sa présence n'est due qu'à la volonté de faire converger l'intégrale correspondante ; on omettra de l'écrire dans toute la suite de ce rapport.

2.2.1 Construction d'un projecteur approximatif

Étude d'un modèle local

On considère provisoirement $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{(x, y), x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q\}$, ainsi que les deux systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels suivants : $(D_j^+)_{1 \leq j \leq p}$ et $(D_j^-)_{1 \leq j \leq p}$ définis par :

$$D_j^\pm = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \pm x_j |D_y| \right)$$

On notera également s_j^\pm les symboles de ces opérateurs, qui vérifient, par définition :

$$s_j^\pm = \xi_j \mp ix_j |\eta|.$$

Les deux systèmes D^+ et D^- ont des comportements très différents lorsque considérés sur L^2 . On va démontrer en particulier :

Proposition 2.8. Il existe un projecteur orthogonal P qui est un OIF à symbole classique, et deux OIF L^+ et L^- , tous deux de degré -1 , vérifiant les conditions suivantes :

1. $Id \sim L^- D^-$.
2. $D^+ P = 0$.
3. $Id \sim P + L^+ D^+$.
4. L'idéal lagrangien positif associé à P est l'unique idéal lagrangien positif qui, d'une part, contient l'idéal engendré par les $2p$ fonctions $s_j^+(x, y, \xi, \eta)$ et $s_j^+(x', y', \xi', \eta')$ et

qui, d'autre part, a un ensemble de points d'annulation prescrit :

$$\{\forall f \in J_\varphi, f = 0\} = \{x = x' = 0, \xi = \xi' = 0, y = y', \eta = \eta'\}.$$

Démonstration. Nous allons démontrer ces quatre points dans l'ordre où ils ont été énoncés. On remarque tout de suite qu'on peut conjuguer les opérateurs D^\pm par la transformée de Fourier selon la seconde variable, et c'est dorénavant dans les variables (x, τ) que nous allons travailler.

1. L'opérateur D^- s'écrit :

$$D_j^- = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j |\tau| \right)$$

On peut résoudre explicitement le problème de Cauchy associé : pour $x = (x^*, x_n)$ avec par exemple $x_n > 0$, si $D_n^- f = g_n$, on a directement par la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} f(x^*, x_n, \tau) &= f(x^*, 0, \tau) e^{\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|} \\ &\quad - i \int_0^{x_n} e^{\frac{1}{2} (x_n^2 - s^2) |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds \end{aligned}$$

Supposons maintenant que f et g_n sont L^2 , alors leur trace sur la droite affine qui nous intéresse est de classe H^{-n+1} . En particulier, on a au moins le long d'une sous-suite,

$$f(x^*, x_n, \tau) e^{-\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|} \xrightarrow{x_n \rightarrow +\infty} 0$$

et par ailleurs, $s \mapsto e^{-\frac{1}{2} s^2 |\tau|} g_n(x^*, s, \tau)$ est intégrable en $+\infty$. Par conséquent, en factorisant l'expression précédente par $e^{-\frac{1}{2} x_n^2 |\tau|}$ et en prenant la limite en l'infini le long d'une sous-suite, on a :

$$f(x^*, 0, \tau) = i \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} s^2 |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression précédente, on a :

$$f(x^*, x_n, \tau) = -i \int_{x_n}^{+\infty} e^{\frac{1}{2} (x_n^2 - s^2) |\tau|} g_n(x^*, s, \tau) ds$$

On vient de construire explicitement L^- .

2. En suivant [BdMS75], on commence par construire un opérateur $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^q) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$Rh(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2} |x|^2 |\tau|} \left(\frac{|\tau|}{\pi} \right)^{p/4} h(\tau)$$

Il est clair que $D^+R = 0$. Par ailleurs, l'adjoint formel de cet opérateur est $R^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$, défini par :

$$R^*h(\tau) = \int e^{-\frac{1}{2}|x|^2|\tau|} \left(\frac{|\tau|}{\pi}\right)^{p/4} h(x, \tau) dx$$

On a alors immédiatement que $R^*R = Id$, grâce à la formule

$$\int e^{-|x|^2|\tau|} dx = \left(\frac{\pi}{|\tau|}\right)^{p/2}.$$

Ainsi, $P = RR^*$ est un projecteur orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, dont l'image est incluse dans le noyau de D^+ .

3. On a, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'identité :

$$\begin{aligned} f - Pf(x, \tau) &= \\ &= \left(\frac{\pi}{|\tau|}\right)^{p/2} \int e^{-\frac{1}{2}|y|^2|\tau|} (f(x, \tau)e^{-\frac{1}{2}|y|^2|\tau|} - f(y, \tau)e^{-\frac{1}{2}|x|^2|\tau|}) dy \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité que $y = (y_j)$, $x = (x_j)$, avec toujours $y_j < x_j$. Alors par la formule de Duhamel, on peut exprimer $f(x, \tau)$ en fonction de $f(y, \tau)$ et des fonctions $g_j := D_j^+ f$, en intégrant successivement sur des arêtes du parallélépipède qui joint x à y . On écrit, sans plus de détail :

$$f(x, \tau) = f(y, \tau)e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2)|\tau|} + \mathfrak{L}^+ g(x, y, \tau)$$

Ici, l'opérateur \mathfrak{L}^+ intègre sur un chemin entre x et y , en multipliant par une fonction dont la dépendance en y est de l'ordre de $e^{\frac{1}{2}|y|^2|\tau|}$.

On constate alors que le premier terme de cette décomposition annule l'autre terme de l'équation précédente, ainsi :

$$f - Pf(x, \tau) = \left(\frac{\pi}{|\tau|}\right)^{p/2} \int e^{-|y|^2|\tau|} \mathfrak{L}^+ g(x, y, \tau) dy$$

Ceci est bien un opérateur pseudodifférentiel de degré -1 appliqué à D^+f .

4. On a :

$$RR^*f(x, \tau) = \int e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 + |x'|^2)|\tau|} \left(\frac{\pi}{|\tau|}\right)^{p/2} f(x', \tau) dx'$$

Cette écriture n'est pas exactement celle d'un OIF, on conjugue donc par la transformée de Fourier par rapport à la seconde variable :

$$\begin{aligned} FRR^*F^*f(x, y) &= \\ &= (2\pi)^{-q} \int e^{-\frac{1}{2}(|x|^2 + |x'|^2)|\tau| + i\langle y - y', \tau \rangle} \left(\frac{\pi}{|\tau|}\right)^{p/2} f(x', y') dy' dx' d\tau \end{aligned}$$

Cet opérateur s'écrit donc comme un OIF, avec une phase positive et 1-homogène :

$$\phi(x, x', y, y', \tau) = i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) |\tau| + \langle y - y', \tau \rangle$$

On va maintenant décrire l'idéal lagrangien associé à ϕ .

On commence par considérer l'idéal des fonctions sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^q$ engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} \phi(x, x', y, y', \tau) &= i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) |\tau| + \langle y - y', \tau \rangle \\ \partial_{x_i} \phi - \xi_j &= -\xi_j + i x_j |\tau| = -s_j(x, \xi, y, \tau) \\ \partial_{x'_i} \phi + \xi'_j &= \xi'_j + i x'_j |\tau| = \bar{s}_j(x', \xi', y', \tau) \\ \partial_{y_i} \phi - \eta_j &= \tau_j - \eta_j \\ \partial_{y'_i} \phi - \eta_j &= -\tau_j + \eta'_j \\ \partial_{\tau_j} \phi &= i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) \frac{\tau_j}{|\tau|} + y_j - y'_j \end{aligned}$$

L'idéal associé à ϕ est alors exactement l'idéal J_ϕ engendré par les fonctions :

$$\begin{aligned} s_j(x, \xi, y, \eta) \\ \bar{s}_j(x', \xi', y', \eta') \\ a_j := \eta_j - \eta'_j \\ b_j := i \frac{1}{2} (|x|^2 + |x'|^2) \frac{\eta_j}{|\eta|} + y_j - y'_j \end{aligned}$$

Cet idéal contient bien l'idéal I engendré par les $s_j(x, \xi, y, \eta)$ et $\bar{s}_j(x', \xi', y', \eta')$; par ailleurs, toute fonction dans cet idéal est contenue dans l'idéal des fonctions nulles sur $\{x = x' = 0, \xi = \xi' = 0, y = y', \eta = \eta'\} = C_\varphi$.

Réciproquement, soit J un idéal lagrangien positif tel que $I \subset J$ avec $\{\forall f \in J, f = 0\} = C_\varphi$, et soit $m \in T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On note K l'idéal des fonctions qui s'annulent sur C_φ . On utilisera, de manière cruciale, le fait qu'un idéal lagrangien est toujours localement engendré par des fonctions dont les différentielles sont indépendantes.

— Si $m \notin C_\varphi$, alors l'une des fonctions qui engendrent J_φ est non nulle au voisinage de m , ainsi que l'une des fonctions qui engendrent J . Donc localement, ces deux idéaux sont les mêmes.

— Si $m \in \mathbb{C}_\varphi$, on peut supposer qu'un système de générateurs locaux de J contient les $s_j(x, \xi, y, \eta)$ et les $\bar{s}_j(x', \xi', y', \eta')$. Alors, sans perte de généralité, les autres générateurs ne dépendent pas de (ξ, ξ') . Parmi ces $2q$ générateurs, il est impossible que moins de q d'entre eux dépendent de (y, y') , à cause de l'inclusion $J \subset K$; par ailleurs, si plus de q d'entre eux dépendent de (y, y') , on peut enlever la dépendance en y de l'un d'entre eux en formant des combinaisons linéaires, et la fonction résultante est alors nécessairement indépendante de y' , encore une fois d'après l'inclusion $J \subset K$.

On a donc q fonctions, notées \tilde{a}_j , qui ne dépendent que de (x, x', η, η') , et q autres fonctions, notées \tilde{b}_j , qui ne dépendent que de $(x, x', y, y', \eta, \eta')$. On va maintenant utiliser le fait que les générateurs locaux doivent commuter pour le crochet de Poisson.

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}_j, s_k\} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial x_k} = 0 \\ \{\tilde{a}_j, \bar{s}_k\} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial x'_k} = 0 \end{aligned}$$

Donc en réalité, les fonctions \tilde{a}_j ne dépendent que de (η, η') . Comme de plus elles sont dans K et que leurs différentielles sont indépendantes, on peut les modifier pour que $\tilde{a}_j = a_j$. On va appliquer le même procédé aux fonctions \tilde{b}_j . On a :

$$\begin{aligned} \{\tilde{b}_j, s_k\} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial x_k} - i \frac{x_k}{|\eta|} \langle \eta, \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y} \rangle = 0 \\ \{\tilde{b}_j, \bar{s}_k\} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial x'_k} + i \frac{x'_k}{\eta} \langle \eta, \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y'} \rangle = 0 \\ \{\tilde{b}_j, a_k\} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \tilde{b}_j}{\partial y'_k} = 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne nous fournit que \tilde{b}_j ne dépend que des variables $x, x', \eta, y - y'$. Alors puisque les différentielles sont indépendantes et que $J \subset K$, en prenant des combinaisons linéaires on peut imposer :

$$\tilde{b}_j = y_j - y'_j + c_j(x, \eta, x')$$

En réinjectant dans les lignes précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_j}{\partial x_k} - i x_k \frac{\eta_j}{|\eta|} &= 0 \\ \frac{\partial c_j}{\partial x'_k} - i x'_k \frac{\eta_j}{|\eta|} &= 0 \end{aligned}$$

donc, puisque $c_j \in \mathbb{K}$

$$c_j(x, \eta) = \frac{i\eta_j}{2|\eta|}(|x|^2 + |x'|^2)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Nous portons à l'attention du lecteur que dans [BdMS75], le résultat concerne la relation canonique complexe associée à ϕ , et que l'argument donné est géométrique ; en particulier, les fonctions génératrices considérées dans cet article ne commutent pas.

□

Le cas général

Les calculs explicites que nous avons menés peuvent se généraliser :

Proposition 2.9. Soit $D = (D_j)_{1 \leq j \leq p}$ un système d'opérateurs pseudodifférentiels classiques de symboles d_j , sur une variété X de dimension n . On suppose que pour tous j et k , on a $\{d_j, d_k\} = 0$, et que par ailleurs, en chaque point d'annulation commun des d_j , la matrice $\{d_j, \overline{d_k}\}$ est, ou bien définie positive, ou bien définie négative.

Alors il existe deux OIF L et S , vérifiant les conditions suivantes, où \sim dénote l'équivalence la plus forte :

1. $Id \sim S + LD$.
2. $DS \sim 0$.
3. $S = S^* \sim S^2$.

En particulier S est un opérateur continu $L^2(X) \mapsto L^2(X)$.

Démonstration. On suit la preuve présentée par Boutet et Sjöstrand. On note Σ l'ensemble des zéros communs des d_j ; pour simplifier, on supposera que les d_j sont analytiques.

Cette proposition est de nature purement locale. D'une part, si on a un recouvrement paracompact de T^*X par des ouverts (W_j) tels que, sur chaque W_j , il existe des opérateurs L_j et (S_j) vérifiant les relations précédentes, où on remplace " \sim " par "le front d'onde de la différence n'intersecte pas W_j ", alors en considérant (χ_j) une partition de l'unité adaptée à (W_j) , les opérateurs suivants conviennent :

$$S = \sum_j \chi_j(x, \xi) S_j(x, \xi)$$

$$L = \sum_j \chi_j(x, \xi) L_j(x, \xi).$$

D'autre part, si dans un ouvert W , on a deux candidats locaux (S, L) et (S', L') , alors naturellement (encore une fois " \sim " signifie "le front d'onde de la différence n'intersecte pas W_j ") :

$$\begin{aligned} S &\sim (S' + L'D)S \sim S'S \\ S' &\sim (S + LD)S' \sim SS', \end{aligned}$$

donc

$$S = S^* \sim (S'S)^* \sim S^*S'^* \sim SS' \sim S'.$$

Donc on a unicité locale de S .

On va maintenant construire S et L localement. Soit W un voisinage d'un point $w \in T^*X$. Si $w \notin \Sigma$, alors l'un des d_j est non nul sur W ; on peut donc prendre pour L une paramétrice de d_j , et $S = 0$.

Si en $w \in \Sigma$, la matrice des $\{d_j, \overline{d_k}\}$ est définie positive, alors il existe d'une part une transformation canonique $\phi : T^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow W$ telle que $d_j \circ \phi = s_j$, où on a repris les notations de la partie précédente; et d'autre part un OIF V associé à ϕ , de paramétrice U , et une matrice inversible A dont les éléments sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques, tels que, sur un ouvert $W' \subset W$, on ait :

$$D \sim UAD^+V$$

Cette dernière affirmation mérite une justification. À cause de l'égalité des symboles, on sait qu'on a $D = UD^+V$ au premier ordre. Par récurrence, s'il existe une matrice elliptique A_n telle que $D = UA_nD^+V$ à l'ordre n , alors il existe une matrice B_n d'opérateurs de degré -1 telle que $D = U(Id + B_n)A_nD^+V$ à l'ordre $n + 1$ (en regardant les symboles). Comme tous les symboles considérés sont classiques, la suite (A_n) converge au moins sur un petit ouvert autour de u . On a alors $D = UAD^+V$ à tous les ordres; comme les symboles considérés sont analytiques, on en déduit le résultat recherché.

Lorsque les d_j ne sont pas analytiques, on ne peut pas conclure, à moins de se contenter d'une classe d'équivalence plus large entre deux OIF, à savoir "être égal à tout ordre". Les constructions des chapitres suivants utilisent seulement la forme faible de l'équivalence de deux OIF, donc cette construction suffit. Notons que dans [BdM75], une preuve est présentée dans le cas non analytique.

En utilisant cette écriture de D , on a envie de poser :

$$\begin{aligned} S_1 &= UPV \\ L_1 &= UL^+A^{-1}V, \end{aligned}$$

où $P = RR^*$ est le projecteur construit précédemment. Malheureusement, l'opérateur S_1 n'est alors pas symétrique, même approximative-

ment. On remarque plutôt que R^*U^*UR est un opérateur pseudodifférentiel (parce que U^*U l'est) classique, et est elliptique. On en considère une paramétrice B , et on pose :

$$S_2 = URBR^*U^*$$

Alors $S_2 \sim S_2^*$, et par ailleurs, $S_1S_2 \sim S_2$, ce dont on déduit que $DS_2 \sim 0$, et par ailleurs $S_2S_1 \sim S_1$, donc $S_2^2 \sim S_2$ et $(Id - S_2)(Id - S_1) \sim Id - S_2$. On peut alors poser :

$$L = (Id - S_2)L_1$$

Alors, comme par construction $1 - S_1 \sim L_1D$, on a bien $S_2 + LD \sim Id$.

On peut alors poser $S = (S_2 + S_2^*)/2$, alors $S = S^*$, et $S = L^2$, finalement le couple (S, L) convient.

Enfin, si $w \in \Sigma$ et que, dans W , la matrice des $\{d_j, \bar{d}_k\}$ est définie négative, alors on peut appliquer un raisonnement similaire, mais cette fois

$$D \sim UAD^{-1}V$$

On peut alors prendre directement $S = 0$ et $L = UA^{-1}D^{-1}V$. \square

En reprenant le raisonnement de la partie précédente, l'unique idéal lagrangien J qui contienne l'idéal engendré par les d_j en le premier jeu de variables et les \bar{d}_j en le second jeu de variables, et dont l'ensemble des points d'annulation est exactement $\text{diag}(\Sigma)$, est l'idéal associé à la phase qui définit S .

Application au projecteur de Szegő

On va considérer le cas particulier où le système d'opérateurs est $\bar{\partial}_b$, sur le bord d'une variété pseudoconvexe.

Par une carte locale, on suppose qu'une variété X , au voisinage d'un point x , est l'intersection d'une sous-variété de \mathbb{C}^n avec un voisinage de 0 noté U , et vérifie $X \cap U = \{\rho = 0\}$ où $d\rho(0) = dz_n + d\bar{z}_n = 2dx_n$, et $\text{Hess}_{\mathbb{C}} \rho \gg 0$. Une base de $T^{0,1}(X \cap U)$ est alors donnée par les $n - 1$ vecteurs :

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n} \right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}.$$

On définit alors le système d'opérateurs (D_j) par

$$D_j f := Z_j \cdot f = df(Z_j).$$

Alors on a, d'une part, $Df = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_b f = 0$, et d'autre part, D_j est un opérateur différentiel créé par le symbole

$$s_j = i(\xi_j - i\eta_j) - i \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n} \right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} (\xi_n - i\eta_n).$$

Ainsi, on a $\{s_j, s_k\} = 0$. Par ailleurs, la variété caractéristique de D est l'ensemble Σ des points (x, ξ) tels que $\xi = \alpha d\rho(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Lorsque $(x, \xi) \in \Sigma$, la matrice $\{s_j, \bar{s}_k\} = \frac{\alpha}{|d\rho|} \text{Hess}_{\mathbb{C}} \rho$ est définie positive lorsque $\alpha > 0$ et définie négative sinon.

On peut alors appliquer le théorème précédent ; on appelle S' le projecteur approximatif ainsi créé, et on a $\bar{\partial}_b S' \sim 0$.

2.2.2 Identification avec le projecteur exact

Dans cette partie, S dénote le projecteur de Szegő, et S' le projecteur approximatif qu'on vient de construire. On veut démontrer qu'en fait :

Proposition 2.10. $S \sim S'$.

Le projecteur de Bergman exact

Pour démontrer la proposition précédente, on va se servir de propriétés de régularité du problème de prolongement holomorphe d'une fonction sur le bord dans le noyau de $\bar{\partial}_b$.

On note d'abord γ l'opérateur de trace au bord, sur les fonctions et sur les formes, de manière à avoir :

$$\gamma \bar{\partial} = \bar{\partial}_b \gamma.$$

On dispose par ailleurs, comme l'ouvert dont X est le bord est relativement compact, d'un opérateur K qui résout le problème de Dirichlet à l'intérieur :

$$\Delta K = 0$$

$$\gamma K = Id.$$

On sait par ailleurs qu'il existe un noyau de Green régulier G_1 , qui vérifie :

$$\Delta G_1 = Id$$

$$\gamma G_1 = 0$$

$$G_1 \Delta + K \gamma = Id.$$

$K\gamma$ est un projecteur, mais il n'est pas orthogonal, on va construire un projecteur H qui corrige ce défaut.

On sait que l'opérateur K^*K est elliptique de degré -1 , et inversible (cf [Kra92]) ; on note $A = (K^*K)^{-1/2}$. Alors $(KA)^*KA = Id_{L^2(X)}$, autrement dit, KA est une isométrie de $L^2(X)$ vers l'ensemble des fonctions harmoniques dans U , de carré intégrable jusqu'au bord. On note encore $H = KA(KA)^*$ le projecteur orthogonal sur cet ensemble.

On note encore $G = (Id - H)G_1$; il satisfait aux mêmes conditions que G_1 en remplaçant γ par K^* , simplement parce que $K^*(Id - H) = 0$. Alors G est régulier et auto-adjoint. Enfin, on introduit une dernière notation, le projecteur de Bergman B sur l'espace des fonctions holomorphes dans $L^2(U)$. On a alors, puisqu'une fonction holomorphe est harmonique :

$$\begin{aligned}\gamma BK &= S \\ KS\gamma &= K\gamma B = B - G_1\Delta B = B.\end{aligned}$$

Nous utilisons à présent les résultats de Kohn, présentés dans l'annexe, et qui sont la raison pour laquelle, pour démontrer un résultat sur le projecteur de Szegő, on commence par montrer un résultat pour le projecteur de Bergman avant de procéder par conjugaison. En effet, on a des résultats de régularité sur B :

Proposition 2.11. Soit B le projecteur orthogonal sur $H^2(D)$. Alors il existe un opérateur continu F tel que $Id = B + F\bar{\partial}$.

On rappelle que μ est un opérateur de restriction de formes sur $\text{Vois}(X)$ à des formes sur X . On a alors :

Proposition 2.12. Il existe une constante C qui ne dépend que de U , telle que si α est une forme sur M vérifiant $\bar{\partial}\alpha = 0$ dans U et $\bar{\partial}^*\alpha = 0$ dans U , alors $\|\alpha\|_{L^2(U)} \leq C\|\gamma\alpha\|_{L^2(X)}$.

Une fonction holomorphe est harmonique, autrement dit, $B = HB$. Par caractère auto-adjoint, on a donc $B = BH = HBH$, autrement dit :

$$B = KA^2K^*BKA^2K^*.$$

B est conjugué à un projecteur orthogonal dans $L^2(X)$, noté $S_A = AK^*BKA$, car alors on a $B = KAS_AAK^*$.

Lemme 2.13. On a $\text{Im}(S_A) = \text{Ker}(\bar{\partial}_b A)$.

Démonstration. L'image de S_A vaut exactement

$$AK^*\text{Im}(B) = A^{-1}\gamma\text{Im}(B).$$

En effet, si f est harmonique, on a $AK^*f = A^{-1}\gamma f$. Or, puisque U est strictement pseudoconvexe, on a exactement $\gamma\text{Im}(B) = \text{Ker}\bar{\partial}_b$. \square

Le projecteur de Bergman approximatif

Le système d'opérateurs $\bar{\partial}_b A$ vérifie encore les hypothèses de la partie précédente, donc on peut construire un projecteur approximatif auto-adjoint S'_A et un OIF L'_A tels que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_b AS'_A &\sim 0 \\ S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A &\sim Id\end{aligned}$$

On peut alors construire un projecteur de Bergman approximatif. On va démontrer que $B' = KAS'_A AK^*$ vérifie, par rapport à $\bar{\partial}$, les bonnes conditions.

Lemme 2.14. On a $\bar{\partial}B' \sim 0$. Par ailleurs, il existe un opérateur continu F' tel que $Id = B' + F'\bar{\partial}$.

Démonstration. On utilise ici les résultats de régularité démontrés dans [Koh63], [Koh64]. En effet, on a évidemment $\bar{\partial}\bar{\partial}B' = 0$, et par ailleurs

$$\bar{\partial}^* \bar{\partial}B' = \frac{1}{2} \Delta KAS'_A AK^* = 0$$

ainsi que

$$\gamma \bar{\partial}B' = \bar{\partial}_b \gamma KAS'_A AK^* = \bar{\partial}_b AS'_A AK^* \sim 0$$

On sait par ailleurs que si $\bar{\partial}\alpha = 0$ et $\bar{\partial}^* \alpha = 0$, alors $\|\alpha\|_2 \leq C\|\gamma\alpha\|_2$. On en déduit que $\bar{\partial}B' \sim 0$.

On va évidemment construire F' à l'aide de L'_A . En multipliant l'identité $Id = S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A$ par KA à gauche et par AK^* à droite, on obtient :

$$H \sim B' + KAL'_A \bar{\partial}_b A^2 K$$

Et en multipliant encore par H à droite, on obtient finalement :

$$H \sim B' + KAL'_A \gamma \bar{\partial}H$$

Il faut ensuite remonter depuis cette équation ; c'est ici qu'on utilise que $Id = H + G\Delta$, car alors :

$$\bar{\partial}H = \bar{\partial}(Id - G\Delta) = (Id - 2\bar{\partial}G\bar{\partial}^*)\bar{\partial}$$

Finalement, l'opérateur

$$F' = 2G\bar{\partial}^* + KAL'_A \gamma (Id - 2\bar{\partial}G\bar{\partial}^*)$$

convient. □

On est près du but. F' et B' sont des opérateurs réguliers : l'image d'une fonction lisse est lisse (parce qu'ils ont été construits comme tels). Cependant, F' n'envoie pas forcément C^∞ dans C^∞ , mais envoie au moins L^2 dans L^2 ; de même, on n'a a priori aucun résultat de régularité sur B .

Néanmoins, on sait que pour $f \in C^{-\infty}$, $(Id - B')f = F'\bar{\partial}f \pmod{C^\infty}$. En multipliant à gauche par B , et en exploitant le fait que $\bar{\partial}B = 0$, on trouve que pour toute distribution f , on a $(B - BB')f \in L^2$. En outre, par dualité, l'opérateur $B - B'B$ est continu de L^2 dans C^∞ .

On peut raisonner de la même façon pour l'autre opérateur : comme $Id - B = F\bar{\partial}$, et que $\bar{\partial}B' \sim 0$, l'opérateur $B' - BB'$ est continu de $C^{-\infty}$ vers L^2 . Alors les trois opérateurs B' , $B - B'B$, $B' - B'B$ sont en particulier continus de C^∞ dans C^∞ , donc par soustraction, B l'est aussi. En bootstrapant, on trouve que $B - B'B \sim 0$, ainsi que son adjoint $B - BB'$.

Ainsi, $B - B'$ est la soustraction des deux opérateurs $B' - BB'$ et $B - BB'$, donc envoie $C^{-\infty}$ dans L^2 ; étant aussi la soustraction de $B' - B'B$ et $B - B'B$, il envoie L^2 dans C^∞ . Ainsi, $(B - B')^2 \sim 0$. Or, en développant $(B - B')^2$ et en réutilisant que $B - B'B \sim B - BB' \sim 0$, on trouve que $(B - B')^2 \sim B - B'$.

Fin de la preuve et examen de la phase

On note S le projecteur de Szegő exact, et S' le projecteur approximatif défini précédemment. On rappelle également que S'_A est le projecteur conjugué à B' . On définit alors naturellement

$$S_1 = AS_A A^{-1}$$

Alors S_1 est un projecteur sur le noyau de $\bar{\partial}_b$ (mais pas forcément orthogonal), de sorte que $SS_1 = S_1$ et $S_1S = S$.

Par ailleurs on a $S'S_1 \sim S_1$ et $S_1S' = S'$ en vertu de l'existence de L' et de L'_A .

S n'est pas a priori un opérateur régulier, mais on peut en fait répéter le raisonnement précédent, ce qui permet de conclure la preuve.

Il s'agit maintenant, pour conclure l'étude du projecteur de Szegő, de trouver une phase qui engendre le bon idéal J .

On se rappelle pour cela que, $X = \partial D$ étant lisse, il existe une fonction ρ strictement pseudoconvexe qui définit X . Cette fonction ρ permet de définir une phase $\psi \in C^\infty(M \times M, \mathbb{C})$ qui vérifie, au voisinage de $\text{diag} X$:

$$\psi(x + h, x + k) = \frac{1}{i} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\alpha! \beta!} (\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \rho)(x) h^\alpha \bar{k}^\beta.$$

On peut également demander que ψ vérifie

1. $\psi(x, y) = -\overline{\psi(y, x)}$
2. $\text{Im} \psi(x, y) \geq C(d(x, X) + d(y, X) + |x - y|^2)$,

où $\bar{\partial}_1$ désigne la dérivée antiholomorphe par rapport à la première variable. En effet, l'équation précédente détermine le jet de ψ le long de $\text{diag} X$, et ce jet respecte la condition d'antisymétrie. Pour la deuxième condition, on a besoin du :

Lemme 2.15. Posons :

$$R(x, y) = \psi(x, y) + \psi(y, x) - \psi(x, x) - \psi(y, y).$$

On a alors, au voisinage de la diagonale :

$$\frac{1}{i}R(x, y) = \text{Hess}_{\mathbb{C}} \rho(x - y) + O(|x - y|^3),$$

$$\text{où comme dans l'annexe, } \text{Hess}_{\mathbb{C}} \rho(\eta, \xi) = \sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \bar{\eta}_k \xi_j.$$

Démonstration. On réalise un développement de Taylor du membre de gauche (noté Φ par la suite) en $x = y$, à l'ordre 2 en y . Le terme d'ordre 0 vaut évidemment 0, et par ailleurs, par l'expression du jet de ψ sur la diagonale,

$$\partial_y^\alpha \Phi|_{x=y} = \partial_y^\alpha \left(\frac{1}{i} \psi(y, x) + \rho(y) \right) |_{x=y} = 0.$$

De manière identique, $\bar{\partial}_y^\alpha \Phi|_{x=y} = 0$. Il ne reste plus que

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} \Phi|_{x=y} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_j \partial \bar{y}_k}(x).$$

Ce qui permet de conclure. □

On a alors, puisque ρ est strictement pseudoconvexe,

$$\begin{aligned} \text{Im} \psi(x, y) &= \frac{1}{2i} (\psi(x, y) + \psi(y, x)) \\ &= \frac{1}{2i} (\psi(x, x) + \psi(y, y)) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{\mathbb{C}}(\rho)(x - y) + O(|x - y|^3) \\ &\geq C(d(x, X) + d(y, Y) + |x - y|^2) + O(|x - y|^3). \end{aligned}$$

On observe alors que la condition 2 est vérifiée par ψ dans un petit voisinage de la diagonale ; on peut donc corriger ψ par une fonction nulle à tous les ordres sur la diagonale, de manière à avoir la condition requise.

Démontrons maintenant que l'idéal J_ψ de $C^\infty(T^*(X \times X), \mathbb{C})$ associé à la phase $(x, y, t) \mapsto t\psi(x, y)$ est exactement l'idéal de l'opérateur intégral de Fourier S' . Pour cela on rappelle que les générateurs locaux de \mathcal{J}_b sont

$$s_j = i(\xi_j - i\eta_j) - i \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n} \right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} (\xi_n - i\eta_n).$$

Et que la variété caractéristique, où les symboles s_j s'annulent tous et où la matrice des crochets de Poisson $\{s_j, \bar{s}_k\}$ est positive, vaut $\Sigma = \{(x, -ird\rho), r > 0\}$. Par la caractérisation de l'idéal dans le théorème de Boutet et Sjöstrand, il suffit de démontrer, d'une part, que chaque s_j appartient à l'idéal J_ψ , et que d'autre part le lieu des zéros communs des fonctions de J_ψ vaut exactement $\text{diag } \Sigma$. Mais par construction, le lieu des zéros communs des fonctions de J_ψ est exactement l'ensemble des points critiques de ψ , qui vaut $\text{diag } \Sigma$. Par ailleurs, un examen direct des générateurs locaux de J_ψ montre que $s_j \in J_\psi$ pour tout j , ce qui permet de conclure.

2.2.3 Développement asymptotique du symbole

On redonne maintenant un calcul réalisé par Boutet et Sjöstrand dans [BdMS75] et qui donne le développement asymptotique d'une composition de deux opérateurs associés à la phase $t\psi$. De cette formule, ils déduisent le premier terme du symbole du projecteur de Szegő.

Soient q_1 et q_2 deux symboles, et Q_1 et Q_2 les opérateurs correspondants. Alors $Q_1 \circ Q_2$ a pour noyau

$$\iiint e^{it\psi(x,w)+is\psi(w,y)} q_1(x,w,t) q_2(w,y,s) dt dw ds$$

On va intégrer par rapport à t en dernier. Par le changement de variable $s = t\sigma$ on se ramène à l'étude de l'intégrale :

$$\iint e^{it(\psi(x,w)+\sigma\psi(w,y))} q_1(x,w,t) q_2(w,y,t\sigma) t dw d\sigma$$

On pose à cet effet :

$$\Phi(x,y,w,\sigma) = \psi(x,w) + \sigma\psi(w,y).$$

Examinons les points critiques de cette phase. On a $\text{Im}\Phi > 0$ sauf si $x = y = w$, et qu'à cet endroit, on a $\partial_w \Phi = i(1 - \sigma)\partial\rho|_X$ et $\bar{\partial}_w \Phi = i(1 - \sigma)\bar{\partial}\rho|_X$. Sachant que $\partial\rho|_X$ est partout non nul, les seuls points critiques sont ceux qui vérifient $x = y = w$ et $\sigma = 1$. Quelle est la hessienne de cette phase ?

Souvenons-nous que D est fortement pseudoconvexe, et qu'à ce titre, la forme de Lévy, restreinte à $T'X$, est définie positive. On notera L_X cette restriction, et on appellera $\det L_X$ le discriminant de la forme quadratique réelle L_X .

Un développement à l'ordre 2 donne alors, au voisinage des points critiques :

$$\begin{aligned} -i\Phi(x,x,w,\sigma) &= (1 - \sigma)\partial\rho(w) + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (w_j - x_j) \overline{(w_k - x_k)} + O(|w - x|^3) \\ &= -i(\sigma - 1)(-i\partial\rho)(w) + \|\text{d}\rho\|_{L_X}(w - x) + O(|w - x|^3) \end{aligned}$$

Remarque 2.16. Ici, nos notations sont cohérentes avec celles utilisées dans l'annexe, où L_X est normalisé afin d'être intrinsèque. La formulation de nos résultats est donc différente de celle de [BdMS75].

Or $-i\partial\rho|_X$ est réelle et vaut 0 sur $T'X + T''X$, et est de norme $\frac{1}{2}\|\text{d}\rho\|(x)$. Donc dans une base orthonormée de $\mathbb{R} \times T_x X$ dont le premier vecteur

est σ et le second vecteur est orthogonal à $T'X + T''X$, la matrice de la hessienne de Φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\|d\rho\|}{4t} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\|d\rho\|}{4t} & * & * & \dots & * \\ 0 & * & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & * & & & \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de L_X dans la base en question.

Le déterminant de cette matrice est donc exactement $\|d\rho\|^{n+1} \frac{\det L_X}{16}$. De cela on peut déduire le développement asymptotique complet de l'intégrale lorsque t est grand, par le théorème de phase stationnaire. On ne peut pas l'appliquer directement, car les symboles dépendent de t , mais si les symboles sont classiques, avec $q_1 \sim \sum q_{1,j}$ et $q_2 \sim \sum q_{2,j}$, alors on peut tronquer à tout ordre. En extrayant le terme de degré 0, on obtient l'équation suivante, avec des opérateurs différentiels $(A_k)_{k>0}$ d'ordre au plus $2k$ tels que, sur la diagonale :

$$\begin{aligned} & \iint e^{it(\psi(x,w)+\sigma\psi(w,x))} q_1(x,w,t) q_2(w,x,t\sigma) t dw d\sigma \\ &= t^{1-n} \frac{4\pi^n}{\|d\rho\|^{\frac{n+1}{2}}(x) \sqrt{\det L_X}} \left[\sum_{j=0}^N \sum_{j'=0}^N q_{1,j}(x,x) t^{m-j} q_{2,j'}(x,x) t^{m'-j'} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N t^{-k} A_k \left(\sum_{j=0}^{N-k} \sum_{j'=0}^{N-k} q_{1,j}(x,\cdot) t^{m-j} q_{2,j'}(\cdot,x) (\cdot t^{m'-j'}) \right) (x,1) \right] + O(t^{m+m'+1-n-N}) \end{aligned}$$

En effet, le fait de dériver $2j$ fois un symbole par rapport à σt fait gagner $2j$ facteurs t mais améliore le comportement du symbole en l'infini du même ordre.

Remarque 2.17. Cette formule présente une certaine similarité avec la formule (5) de composition des opérateurs pseudodifférentiels. On pourrait en réalité montrer une formule très générale de composition des symboles pour des OIF quelconques, mais nous avons voulu éviter la lourdeur du formalisme associé et se contenter de ce cas précis où la composition de deux opérateurs paramétrés par ψ donne un nouvel opérateur paramétré par ψ .

En particulier, au premier ordre, le symbole de la composition sur la diagonale est

$$q_1 \# q_2(x,x,t) = \Xi(x) q_{1,0}(x,x) q_{2,0}(x,x) t^{1-n+m+m'} + O(t^{m+m'-n}),$$

où le coefficient vaut

$$\Xi(x) = \frac{4\pi^n}{\|d\rho\|^{\frac{n+1}{2}}(x) \sqrt{\det L_X}}.$$

Essayons alors de réaliser un projecteur parmi $I(X \times X, \mathbb{C})$, d'ordre m dont le symbole s soit classique. L'équation sur s_0 est alors :

$$s_0(x, x)t^m = \Xi(x)s_0(x, x)^2t^{1-n+2m}.$$

Ceci implique, d'une part, $m = n - 1$, et d'autre part, sur la diagonale,

$$s_0(x, x) = \frac{\|d\rho\|^{\frac{n+1}{2}}(x)\sqrt{\det L_X}}{4\pi^n} \text{ ou } 0.$$

Cependant on sait que s_0 peut aussi être retrouvée, de manière beaucoup plus compliquée, par les constructions précédentes, en partant du symbole de RR^* qui, lui, est non nul sur la diagonale. Ceci implique que s_0 est lui-même non nul sur la diagonale.

Il n'y a en fait pas besoin des termes suivants de ce développement pour retrouver le projecteur de Szegő. Notre symbole s_0 , qui vérifie $s_0 = s_0^*$, est le premier terme du développement de s , le symbole du projecteur de Szego. Or $s_0^{\#2} = s_0 + r$, où r est un symbole qui donne naissance à un opérateur d'ordre -1 . On a alors $r = r^*$ et $\bar{\partial}_b r = 0$. Essayons de trouver $s = s_0 + (1 - 2s_0)E(r)$ tel que $s\#s = s$. On a alors (puisque r commute avec s_0) :

$$r - E(r)(4r + 1) + (1 + 4r)E(r)^{\#2} = 0$$

On peut alors trouver une série formelle en r qui résout cette équation à tout ordre. À cette série formelle est associée une réalisation, puisque r donne naissance à un opérateur d'ordre -1 . Par cette méthode on peut construire S approximativement à tous les ordres, mais d'une part on ne peut pas réaliser S à un noyau C^∞ près, et d'autre part cette méthode *ex nihilo* ne permet pas de démontrer que $\bar{\partial}_b S = 0$ mais seulement $\bar{\partial}_b S \sim 0$.

2.3 FIBRÉS POSITIFS SUR UNE VARIÉTÉ DE KÄHLER COMPACTE

2.3.1 Sections holomorphes de fibrés positifs

On va appliquer l'analyse microlocale du projecteur de Szegő à la quantification de variétés kähleriennes compactes. On exposera ici les principaux résultats et raisonnements de [Zel00].

Soit M une variété complexe compacte, et (L, h) un fibré en droites sur M associé à une structure hermitienne. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, h induit une métrique h_N sur $L^{\otimes N}$. Notre but ici est d'étudier les espaces $H^0(M, L^{\otimes N})$, dont on se donne une base orthonormée $(s_1^N, \dots, s_{d_N}^N)$ (on sait que $H^0(M, L^{\otimes N})$ est de dimension finie car M est compacte).

On suppose que L est *strictement positif*, c'est-à-dire que $D = \{(m, v) \in L^{-1}, h_{-1}(v, v) < 1\}$ est fortement pseudoconvexe (cf annexe). Le produit hermitien h définit alors une métrique sur M , que l'on va définir maintenant. Soit V un petit ouvert de M , U un petit ouvert de \mathbb{C}^n , L_V la fibre au-dessus de V , et soit une carte locale de la forme

$$\begin{aligned} \Psi : U \times \mathbb{C} &\mapsto L_V \\ (x, z) &\mapsto (\psi(x), za(x)) \end{aligned}$$

où on demande que ψ et a soient holomorphes. De cela on peut déduire une carte locale sur L_V^* :

$$\begin{aligned} \Psi^* : U \times \mathbb{C} &\mapsto L_V^* \\ (x, z) &\mapsto (\psi(x), za^{-1}(x)) \end{aligned}$$

L'équation qui définit $(\Psi^*)^{-1}D$ est alors $|z|^2 \leq \|a(x)\|_h$. Comme X est fortement pseudoconvexe, on a nécessairement, sur un voisinage de $(\Psi^*)^{-1}X$:

$$\text{Hess}_{\mathbb{C}}((x, z) \mapsto \log(|z|^2 \|a(x)\|_h^{-2})) \gg 0.$$

En effet, il existe une fonction qui définit $(\Psi^*)^{-1}X$ et telle que sa hessienne complexe sur le bord est définie positive. Or, par la proposition A.20, la positivité ne dépend pas de la fonction qui définit le bord.

On en déduit simplement que $-\text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a(x)\|_h \gg 0$. Cette condition est en fait équivalente à la forte pseudoconvexité de D , et est parfois considérée comme la définition d'un fibré positif, mais nous avons préféré nous concentrer sur le problème qui nous intéresse.

La forme sesquilinéaire $-\text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a(x)\|_h$ permet alors de définir une structure riemannienne sur U , en prescrivant :

$$\begin{aligned} \xi \in T^{1,0}U &\Rightarrow |\xi| = -\text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a(x)\|_h(\xi, \xi) \\ \eta \in T^{0,1}U &\Rightarrow |\eta| = -\text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a(x)\|_h(\bar{\eta}, \bar{\eta}) \\ T^{1,0}U &\perp T^{0,1}U \end{aligned}$$

En poussant par Ψ , on obtient une structure riemannienne sur V .

Peut-on recoller les morceaux ? Clairement, si deux cartes Ψ_1 et Ψ_2 , de la forme précédente, sont définies sur le même ouvert, alors sans perte de généralité $\psi_1 = \psi_2$. En effet, on peut faire des changements de variable en x seul, et la modification de $\text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a\|_h$ est alors compatible avec le changement de carte des espaces tangents.

Dans ce cas les fonctions a_1 et a_2 ne diffèrent que d'un facteur holomorphe f , avec sans perte de généralité $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Il ne reste plus qu'à voir que :

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|f a_1\|_h &= \frac{1}{2} \text{Hess}_{\mathbb{C}} \log f + \frac{1}{2} \text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \bar{f} + \text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a_1\|_h \\ &= \text{Hess}_{\mathbb{C}} \log \|a_1\|_h \end{aligned}$$

On peut donc construire une structure riemannienne sur M , de manière univoque.

De manière peut-être encore plus naturelle, $-\partial\bar{\partial}\log\|a\|_h$ est une $(1,1)$ forme sur U , qui peut être prolongée en une $(1,1)$ forme univoque sur M , fermée (car localement exacte), et non dégénérée, autrement dit, une forme symplectique ω_g . Cette forme symplectique est reliée à la structure riemannienne, par $|\xi| = \omega_g(\xi, J\xi)$. La forme symplectique, la structure riemannienne, et la structure complexe sont compatibles, on dit que c'est une structure *kählérienne*.

Le cadre géométrique étant donné, on peut formuler les résultats de l'article [Zel00]. On y démontre l'existence d'un développement asymptotique :

Théorème 4 (Zelditch). Il existe une famille de fonctions lisses $a_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, lorsque $N \rightarrow +\infty$, pour tout $R > 0$,

$$\sum_{i=1}^{d_N} \|s_i^N(z)\|_{h_N}^2 = N^n + \sum_{0 < j < R} a_j(z) N^{n-j} + O_{C^\infty}(N^{n-R})$$

Ce théorème est riche de ses corollaires. Il implique premièrement que pour N assez grand, les sections s_i^N ne s'annulent pas toutes en même temps, on peut alors définir une application projective définie par $\varphi_N : M \mapsto \mathbb{C}\mathbb{P}^{d_N-1}$ par $m \mapsto [s_1^N(m) : \dots : s_{d_N}^N(m)]$, qu'on appelle application de Kodaira. On peut alors démontrer :

Théorème 5 (Kodaira). [FG02] Pour N assez grand, φ_N est un plongement.

On peut alors comparer la métrique ω_g avec le pull-back par φ_N de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^{d_N-1}$. On a en fait :

Théorème 6 (Tian). [Tia90] Soit $k \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\left\| \frac{1}{N} \varphi_N^*(\omega_{FS}) - \omega_g \right\|_{C^k} = O(N^{-1})$$

Le plongement de Kodaira est donc quasiment isométrique.

2.3.2 Espaces de Hardy équivariants

On notera X la frontière de D ; c'est un S^1 -fibré sur M , et la fonction $\rho(z) = h_{-1}(z, z) - 1$ définit X . La fonction ρ , et l'opérateur $\bar{\partial}_b$, sont alors invariants par l'action de S^1 . On peut donc décomposer l'espace de Hardy $H^2(X)$ en la somme directe des :

$$H_N^2(X) = \{f \in H^2(X), f(r_\theta x) = e^{iN\theta} f(x)\}$$

L'espace $H_N^2(X)$ sera appelé *espace de Hardy N-équivariant*. On va maintenant relier les fonctions dans cet espace aux sections holomorphes de $L^{\otimes N}$:

Proposition 2.18. Soit $N \in \mathbb{Z}$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} H^0(M, L^{\otimes N}) &\mapsto H_N^2(X) \\ s &\mapsto \left((m, v) \mapsto \langle v^{\otimes N}, s(m) \rangle \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme unitaire.

Étudier $H^0(M, L^{\otimes N})$ revient donc à étudier les espaces de Hardy N-équivariants. On note S_N le projecteur orthogonal de $L^2(X)$ sur $H_N^2(X)$, et encore $S_N(x, y)$ le noyau de ce projecteur, qui n'est rien d'autre que la N-ième composante de Fourier de $S(x, y)$ par rapport à sa première variable.

En notant $(s_1^N, \dots, s_{d_N}^N)$ une base orthonormée de $H^0(M, L^{\otimes N})$, et en notant $(\hat{s}_1^N, \dots, \hat{s}_{d_N}^N)$ la base correspondante de $H_N^2(X)$, on a naturellement :

$$S_N(x, y) = \sum_{i=1}^{d_N} \hat{s}_i^N(x) \overline{\hat{s}_i^N(y)}$$

En particulier, sur la diagonale,

$$S_N(x, x) = \sum_{i=1}^{d_N} \|\hat{s}_i^N(x)\|^2$$

Au point w défini par les coordonnées $[w_0 : \dots : w_m]$, la métrique de Fubini-Study s'écrit :

$$\omega_{\text{FS}}(w) = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{i=0}^m |w_i|^2 \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi_N^* \omega_{\text{FS}}(m) &= N\omega_g + \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{j=0}^m \|s_j^N(m)\|_{h_N}^2 \right) \\ &= N\omega_g + \frac{i}{2\pi} \partial_b \bar{\partial}_b \log S_N(x, x) \end{aligned}$$

L'avant-dernière ligne mérite une explication. Si e_L est une section locale de L , holomorphe et non nulle, alors avec $a = \|e_L\|_h$, on a $\omega_g = i \partial \bar{\partial} a$ par définition. Par ailleurs on écrit localement $s_i^N = f_i^N e_L^{\otimes N}$, où les

f_i^N sont des fonctions holomorphes au voisinage du point considéré. Alors par définition,

$$\varphi_N^* \omega_{\text{FS}}(m) = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{i=0}^m |f_i^N|^2 \right).$$

d'où le résultat.

Il ne reste plus qu'à estimer S_N et $\partial_b \bar{\partial}_b S_N$ le long de la diagonale, ce qu'on va faire grâce à la caractérisation ci-dessus.

2.3.3 La preuve

On part de :

$$S_N(x, x) = N \iint e^{iN(-\theta + t\psi(r_\theta x, x))} \sum_{k=0}^{+\infty} s_k(r_\theta x, x) (Nt)^{n-1-k} dt d\theta + O(N^{-\infty})$$

où on a fait le changement de variable $t \mapsto Nt$ dans le but d'appliquer le lemme de phase stationnaire.

On définit alors la phase

$$\Phi(x, x, t, \theta) = t\psi(r_\theta x, x) - \theta,$$

qui vérifie $\text{Im}(\Phi) \geq 0$. Comme $\text{Im}(\psi) > 0$ hors de la diagonale, il n'y a pas de point critique sauf si $r_\theta x = x$, autrement dit, $\theta = 0$.

Le comportement de ψ par rapport à l'action de S^1 va être spécifié maintenant. Rappelons que la phase doit vérifier, pour $h \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{C}^n$ petits, par une carte locale :

$$\psi(x + h, x + k) = -i \sum_{\alpha, \beta} (\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \rho)(x) h^\alpha \bar{k}^\beta + O(h^\infty, k^\infty). \quad (10)$$

Pour clarifier l'esprit, donnons-nous une carte locale holomorphe au voisinage U d'une fibre de L^* . On a alors une fonction non nulle a telle que $U \cap X \approx \{(m, v) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}, a(m)|v| \leq 1\}$. On a alors $\rho(m, v) = 1 - a(m)^2 |v|^2$. Ainsi, on a $\partial_v \rho(m, v) = a(m)^2 \bar{v}$. Par ailleurs, le champ de vecteurs ∂_θ qui engendre l'action de S^1 vaut exactement $\partial_\theta(m, v) = (0, iv)$. On a alors que, pour θ petit, la dépendance en θ est :

$$\psi(r_\theta x, x) = \theta + O(\theta^2).$$

Ainsi :

$$\Phi(x, x, t, \theta) = (t-1)\theta + O(\theta^2).$$

Les points critiques vérifient $d_t \Psi = d_\theta \Psi = 0$, donc $t = 1, \theta = 0$. En ce point critique, le déterminant de la hessienne vaut -1.

On invoque alors le lemme de phase stationnaire : il existe des opérateurs différentiels $L_{k,j}$, de degré $2k$, indépendants de N , tels que, à tout ordre $K > 0$,

$$S_N(x, x) = N^n s_0(x, x) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^{K-k} N^{n-k-j} L_{k,j} s_j(x, x) + R(N, K, x)$$

$$S_N(x, x) = N^n \frac{1}{4\pi^n} \sqrt{\det L_X} + \sum_{k=1}^K N^{n-1} a_k(x) + R(N, K, x)$$

En effet, on a $\|d\rho\| = 1$ sur X dans ce cas particulier.

Ici, on a, pour tous N et j ,

$$\|R(N, K, \cdot)\|_{C^j} \leq N^{n-K-1} C_{j,K}$$

Ceci est l'estimation sur $S_N(x, x)$ désirée. En différenciant cette expression, on obtient $\partial_b \bar{\partial}_b \log(S_N(x, x)) = O(1)$, d'où le corollaire.

Remarque 2.19. Le premier terme de S_N sur la diagonale est universel au niveau des formes volumes, il vaut $C_n = \frac{1}{\pi^{n-1}}$.

Comme S_N est un projecteur, on a évidemment :

$$\text{tr}(S_N) = \int_X S_N(x, x) dV = 2\pi C_n \text{Vol}(M) = \dim H_N^2(X). \quad (11)$$

En particulier, on vient de démontrer l'existence d'un développement asymptotique :

$$\dim H_N^2(X) = 2\pi C_n \text{Vol}(M) N^n + \sum_{k=1}^K C_k N^{n-k} + O(N^{n-K}). \quad (12)$$

Ce résultat est très similaire au théorème de Riemann-Roch. Dans le cas de $\mathbb{C}P^1$, l'espace des sections de $\mathcal{O}(1)^{\otimes N}$ est en bijection naturelle avec l'espace des fonctions méromorphes avec un pôle d'ordre au plus N en $[0 : 1]$. Le théorème de Riemann-Roch est en réalité plus puissant car il donne une expression polynomiale de la dimension.

Remarquons que l'application de Kodaira est non seulement bien définie, mais immersive : si sa différentielle en un point n'était pas injective, le pull-back de la forme de Fubini-Study serait nul à cet endroit.

La démonstration de l'injectivité de l'application de Kodaira est reportée au chapitre suivant ; en effet, elle repose sur l'expression asymptotique de S_N au voisinage de la diagonale.

STRUCTURE DE TOEPLITZ

Cette partie est consacré à un exposé des raisonnements et résultats de [SZ02]. Cependant, l'auteur a préféré, pour des raisons de clarté, exposer les raisonnements sur les Opérateurs Intégraux de Fourier en terme de leurs idéaux, et non de leurs lagrangiennes. Cette différence est motivée par la définition identique des idéaux dans le cas d'une phase complexe, et par la difficulté conceptuelle que pose d'emblée l'introduction des extensions presque analytiques comme présenté dans [MS75]. On rompt donc avec la description originelle proposée par Boutet et Guillemin.

Dans ce chapitre, on reprend les outils et objets du chapitre précédent, mais on va en présenter une construction alternative, qui n'utilise pas a priori la structure exacte de $\bar{\partial}_b$, telle que la caractérisation microlocale de son noyau, ni même l'existence de solutions. Le but est de pouvoir étendre cette construction, donnée par Boutet et Guillemin dans l'annexe de [BdMG81], à des cas où la structure complexe est remplacée par une structure presque complexe non intégrable, dans laquelle $\bar{\partial}_b$ a les mêmes propriétés micro-locales, mais ne possède pas de solution globale.

De manière similaire aux constructions de la section 2.3, on se donne (M, ω, J) une variété symplectique presque complexe de dimension $2n$, et on se donne (L, h) un fibré en droites hermitien sur M . Il s'agit maintenant de retrouver dans le cas symplectique la notion de "bonne courbure" pour L . Une des manières, décrite dans [Woo97], est de munir L d'une connexion ∇ telle que les dérivées covariantes de la métrique h s'annule, et dont la courbure vaut $-i\omega$.

Dans le cas complexe, on peut construire explicitement une telle connexion : si a est une section locale holomorphe non nulle fixée, on considère la connexion qui vérifie $\nabla a = \partial \log \|a\|_h \otimes a$, et les dérivées covariantes de la métrique h s'annulent dans ce cas ; la courbure de la connexion vaut exactement $-i\omega_g$ selon les constructions du chapitre précédent.

Remarque 3.1. L'introduction de la connexion ∇ peut paraître artificielle dans ce contexte. En réalité, le cadre naturel d'application de cette théorie est l'étude de la quantification au sens de Kostant [Kos70] et Souriau [Sou67], où ∇ est alors donné a priori.

A partir de ces données géométriques, on va reprendre le travail du chapitre précédent, mais en fonctionnant à l'envers : après avoir ex-

PLICITÉ DES COORDONNÉES LOCALES, on construit en premier lieu un opérateur différentiel $\bar{\partial}_b$, puis un idéal lagrangien idempotent ayant les bonnes propriétés micro-locales, puis un projecteur associé, et on définit les espaces de Hardy comme les fonctions équivariantes dans le noyau de ce projecteur.

On notera $g(v, w) = \omega(v, Jw)$ la métrique riemannienne compatible avec ω et J .

3.1 CONSTRUCTION DU PROJECTEUR APPROXIMATIF

3.1.1 Des bonnes coordonnées locales

Soit (M, ω, J) une variété symplectique presque complexe, et L un fibré en droites complexes sur M muni d'une structure hermitienne h et d'une connexion ∇ , dont la courbure vaut ω et telle que les dérivées covariantes de h s'annulent. On se donne un point $P_0 \in M$. Au voisinage de ce point, on va considérer des coordonnées locales $(x_i, y_j)_{1 \leq j \leq n}$. On écrit $z_j = x_j + iy_j$. Qu'exige-t-on de ces coordonnées? D'un côté, on aimerait avoir $\partial/\partial z_j \in T^{1,0}M$ pour tout j , autrement dit, $\partial/\partial y_j = -J\partial/\partial x_j$; de l'autre, on voudrait que ce système de coordonnées envoie ω sur la forme symplectique canonique $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$. Malheureusement, ces conditions sont incompatibles sauf si J est intégrable. Néanmoins on peut exiger d'avoir ces conditions en le point P_0 .

Définition 3.2. On dit que ce système de coordonnées est *privilegié* lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Pour tout j , on a $\left. \frac{\partial}{\partial z_j} \right|_{P_0} \in T^{1,0}M$.
- $\omega(P_0) = \sum dx_i \wedge dy_i$.

Remarque 3.3. Sous ces conditions, on a aussi $g(P_0) = \sum dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i$.

On peut alors corriger les vecteurs pour former une base locale \bar{Z}_j de $T^{0,1}M$, avec :

$$\bar{Z}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^m B_{j,k}(z) \frac{\partial}{\partial z_k},$$

avec $B_{j,k}(P_0) = 0$. Il s'agit maintenant de compléter ce système de coordonnées en un système de coordonnées sur L , par une section e_L . Quitte à la multiplier par une fonction, on peut supposer que $\|e_L\|_{P_0} = 1$, $\nabla e_L(P_0) = 0$, ainsi que $\nabla^2 e_L(P_0) = -(g + i\omega) \otimes e_L|_{P_0}$.

Dans les coordonnées locales privilégiées, ceci revient à exiger :

$$\|e_L\|(z) = 1 - \frac{|z|^2}{2} + O(|z|^3)$$

On notera $a(z) = \|e_L(z)\|^{-2}$, et cette notation sera à nouveau utilisée plus loin.

On peut alors définir une carte locale de $X = \{(m, v) \in L^*, \|v\|_h = 1\}$ par :

$$(z_1, \dots, z_n, \theta) \mapsto e^{i\theta} a(z)^{-1/2} e_L^*(z)$$

Les coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n, \theta)$ sur X sont appelées coordonnées de Heisenberg.

3.1.2 Construction de générateurs

Notre but est à présent de définir un projecteur de Szegő comme un opérateur intégral de Fourier. Celui-ci sera décrit par une phase complexe, il est donc confortable de raisonner en termes d'idéaux lagrangiens.

L'opérateur de Cauchy-Riemann sur X (défini comme dans le cas complexe à partir de J ; cf section A.1.3) est un opérateur pseudodifférentiel. Son symbole peut être décrit localement : si (\bar{Z}_j) est la base locale de $T^{0,1}M$ définie précédemment, et (ζ_j) est la base duale correspondante, le symbole est :

$$d_0 := \sigma_{\bar{\partial}_b}(x, \xi) = \sum_j \langle \xi, \bar{Z}_j \rangle \zeta_j$$

Notons $p_j(x, \xi) = \langle \xi, \bar{Z}_j \rangle$, et posons $\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0, p_j(x, \xi) = 0 \forall j\}$; c'est un fibré en droites réelles sur X . On aimerait définir l'idéal lagrangien en partant de ces fonctions. On rappelle que dans le cas kählerien, les fonctions p_j engendrent un idéal \mathcal{I} qui permet de définir l'idéal dont $\bar{\partial}_b$ est un OIF associé. Pour réaliser cette construction, on a utilisé le fait que l'idéal engendré par ces fonctions était fermé pour le crochet de Poisson, ce qui n'est plus le cas ; en effet, les champs de vecteurs \bar{Z}_j ne commutent pas, et :

$$\{p_j, p_k\}(\xi) = \langle \xi, [\bar{Z}_j, \bar{Z}_k] \rangle.$$

Qu'en est-il des conditions de positivité ? Posons $p_\theta(\xi) = \langle \xi, \partial/\partial\theta \rangle$, où $\partial/\partial\theta$ dénote la dérivée selon l'action de S^1 sur X . Alors sur Σ , la fonction p_θ ne s'annule pas (car si $p_\theta = 0$ et $p_j = 0$, alors $\bar{p}_j = 0$, donc ξ est orthogonal à une base de TX , donc est nul, absurde.) Par ailleurs, on a choisi nos vecteurs Z_j pour être orthonormés, ainsi, $\frac{1}{i}\{p_j, \bar{p}_k\} = \delta_k^j p_\theta$. La matrice $\{\frac{1}{i}\{p_j, \bar{p}_k\}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive ou bien définie

négative selon le signe de p_θ , partitionnant Σ en deux fibrés en demi-droite, comme dans le cas complexe. Si on arrive à maintenir cette condition sur nos générateurs modifiés, on pourra continuer notre construction.

Le tenseur de Nijenhuis va nous permettre de construire des générateurs convenables. En effet, on constate que $\{p_j, p_k\}$ est nul sur Σ , puisque $[\bar{Z}_j, \bar{Z}_k] \in T^{1,0} \cup T^{0,1}$. On a donc :

$$\{p_j, p_k\} = \sum_{l=1}^n f_{jk}^l p_l + \sum_{l=1}^n N_{jk}^l \bar{p}_l$$

On veut corriger les p_j au voisinage de Σ pour éliminer le facteur N_{jk}^l au premier ordre. Pour cela, on utilise qu'au voisinage d'un point de Σ , la fonction p_θ n'est pas nulle. On peut donc poser :

$$p_j^{(2)} = p_j + \frac{i}{3p_\theta} \sum_{k,l} N_{jk}^l \bar{p}_k \bar{p}_l$$

Et alors, comme $\{p_j, \bar{p}_k\} = i\delta_k^j p_\theta$, on a que le crochet $\{p_j^{(2)}, p_k^{(2)}\}$ est dans l'idéal engendré par les $p_l^{(2)}$ à l'ordre 2 au voisinage de Σ . On peut réitérer et construire par récurrence le jet sur Σ d'une famille de fonctions $p_j^{(\infty)}$ qui va convenir.

Résumons : on a construit des fonctions $p_j^{(\infty)}$ qui vérifient que :

Proposition 3.4. L'idéal \mathcal{I} engendré par les fonctions $p_j^{(\infty)}$ est fermé pour le crochet de Poisson. L'ensemble des zéros communs des fonctions dans \mathcal{I} , noté Σ , se décompose en Σ^+ , sur lequel la matrice $\frac{1}{i}\{p_j^{(\infty)}, p_k^{(\infty)}\}$ est définie positive, et Σ^- , sur lequel cette matrice est définie négative.

Ces conditions géométriques sont exactement celles qui permettent d'appliquer le raisonnement sur les idéaux lagrangiens évoqué dans la section 2.2 :

Proposition 3.5. Il existe un unique idéal, noté $\mathcal{J} \in C^\infty((T^*X \setminus 0)^2, \mathbb{C})$, vérifiant toutes les conditions suivantes :

- $\mathcal{I} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\mathcal{I}} \subset \mathcal{J}$;
- L'ensemble des points d'annulation de toutes les fonctions dans \mathcal{J} vaut $\text{diag}(\Sigma^+)$;
- $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}$;
- $\mathcal{J} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

3.1.3 Paramétrisation de l'idéal

Pour montrer que \mathcal{J} est un idéal lagrangien, on va montrer que c'est l'idéal relié à une phase complexe ψ , qu'on va construire maintenant.

L'invariance par rapport à S^1 et l'antisymétrie de \mathcal{J} nous invitent à considérer une phase sur $X \times X \times \mathbb{R}$ de la forme

$$(z, \theta, w, \phi, t) \mapsto it \left(1 - e^{i(\theta-\phi)} \frac{a(z, w)}{\sqrt{a(z)a(w)}} \right),$$

où $a(z, w) = \overline{a(w, z)}$.

La raison de la notation $a(z, w)$ vient du fait que \mathcal{J} est contenu dans l'idéal des fonctions qui s'annulent sur $\text{diag}(\Sigma^+)$, ce qui signifie en particulier que ψ doit s'annuler sur la diagonale, et donc $a(z, z) = a(z)$. La même inclusion donne $d_z a$ sur la $\text{diag}(\Sigma^+)$, puisqu'à cet endroit on doit avoir $p_j^{(\infty)}(z, \theta, d_1 \psi) = 0$ pour tout j . Ces conditions déterminent, de manière unique, le germe de ψ sur la diagonale.

Peut-on associer à ce germe une phase positive ? On peut vérifier à la main (cf [SZ02], Lemme 2.4) que :

$$a(z, w) = 1 + z\bar{w} + O(|z|^3 + |w|^3).$$

Ceci entraîne que toute fonction ayant le même germe que la forme précédente, est de partie imaginaire positive, et même strictement positive hors de la diagonale (avec hessienne non nulle). On peut donc trouver une fonction ayant ce germe et qui soit une phase complexe (au sens de la définition 1.6) dont l'ensemble des points critiques soit $\text{diag}(\Sigma)$.

3.1.4 Construction d'un projecteur de Szego

On va construire $S \in I^0(X, X, \mathcal{J})$ vérifiant $S = S^2 = S^*$. On commence naturellement par déterminer le premier terme du symbole : avec $S = \int_{\mathbb{R}^+} e^{it\psi} s_0(x, y) t^{n-1} dt \text{ mod. } I^{-1}(X, X, \mathcal{J})$, on a, grâce au lemme de phase stationnaire :

$$s_0(x, y)^2 = h(x, y) s_0(x, y) \text{ mod. } \psi.$$

Ici $h(x, y)$ est une fonction liée à la hessienne de ψ , et non nulle sur la diagonale.

Si on veut que s_0 ne s'annule pas, on a un unique candidat naturel modulo ψ , à savoir $s_0(x, y) = h(x, y)$.

On peut maintenant appliquer le même raisonnement qu'au chapitre précédent : on dispose d'un projecteur approximatif, lié à un symbole s_0 , qui vérifie que $s_0 * s_0 = s_0 + r$, avec $r \in S^{-1}$. Si on veut $s = s_0 + e$ avec $s * s = s$, on obtient $e = 1/2 - \sqrt{r + 1/4}$. Cette série formelle possède une réalisation, et l'on peut construire S , qui est unique à un noyau C^∞ près, et qui est approximativement un projecteur orthogonal.

Quitte à remplacer S par $(S + S^*)/2 \sim S$, on peut supposer que S est auto-adjoint. Puisque $S^2 = S + K$, et que K est un opérateur compact, on a $\text{spec}_{\text{ess}}(S) = \{0, 1\}$. S possède éventuellement des valeurs propres, qui s'accumulent en 0 ou en 1. On peut donc, à un projecteur de dimension finie près, corriger S en un projecteur.

3.1.5 Opérateur pseudo-différentiel associé à S

On va remplacer $\bar{\partial}_b$ par un opérateur \bar{D}_0 tel que S est la projection sur le noyau de \bar{D}_0 .

Construisons de ce pas cet opérateur, en suivant la méthode proposée dans [BdMG81]. On commence par constater que comme s_0 est dans le noyau de $\bar{\partial}_b$, l'OIF $\bar{\partial}_b S$ est associé à un symbole dans S^{n-1} . On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 3.6. Soit A un OIF pour l'idéal \mathcal{J} , associé à un symbole dans S^m . Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel Q de degré $m - n + 1$ tel que $A \sim QS$. Si A est symétrique alors on peut choisir Q symétrique.

Démonstration. Raisonnons d'abord localement. Au voisinage d'un point $(x, y) \in X \times X$, notons a un symbole de A . Si $x \neq y$, alors $A(x, y)$ est C^∞ au voisinage de (x, y) donc $Q = 0$ convient. Si $x = y$, on sait que $s_0(x, y)$ est non nul au voisinage de (x, y) , donc sur ce voisinage on peut écrire $a(x, y, t) = t^{n-1} s_0(x, y) q_0(x, y, t)$, où q_0 est de degré $m - n + 1$. Avec Q_0 l'opérateur pseudo-différentiel de symbole q_0 , on a $A - SQ_0 \in \mathcal{I}^{m-1}(X, X, \mathcal{J})$ au voisinage de (x, y) . Récursivement, on construit une suite de symboles q_i , de degré $m - i$, tel que $A - S(Q_0 + Q_1 + \dots + Q_i) \in \mathcal{I}^{m-i-1}(X, X, \mathcal{J})$ au voisinage de (x, y) . A la suite formelle q_i , on peut associer une réalisation Q par le lemme de Borel. Alors $A - SQ$ est de classe C^∞ au voisinage de (x, y) . Si a est symétrique alors naturellement la suite q_i est symétrique donc Q est symétrique.

Par une partition de l'unité sur $X \times X$, on peut construire Q globalement. \square

Par application du lemme, on sait alors que $\bar{\partial}_b S \sim QS$, où Q est un opérateur pseudo-différentiel symétrique de degré 0. Par ailleurs, on peut remplacer Q par sa moyenne le long de l'action de S^1 (qui lui est équivalente) de manière à ce que Q soit S^1 -invariant.

On construit alors $D_0 = (\bar{\partial}_b - Q)(Id - S)$. C'est un opérateur symétrique, et pseudodifférentiel puisque $\bar{\partial}_b$ et Q sont pseudodifférentiels et $(\bar{\partial}_b - Q)S \sim 0$; par ailleurs D_0 est symétrique, S^1 -invariant, de symbole d_0 , et S est la projection sur le noyau de D_0 .

On peut en fait construire un complexe d'opérateurs qui simulent le complexe $\bar{\partial}_b$ (agissant sur les $(0-q)$ -formes), mais nous ne le ferons pas ici.

3.2 ASYMPTOTIQUES DANS L'ESPACE DE HARDY

Comme D_0 commute avec l'action de S^1 , on peut décomposer son noyau selon les espaces propres de ∂_θ : pour $N \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $H_N^2(X)$ des fonctions dans $L^2(X)$ annulant D_0 et N -équivariantes. On note par ailleurs S_N la projection orthogonale sur $H_N^2(X)$, et encore S_N le noyau de ce projecteur, qui est la N -ième composante de Fourier de $S(x, y)$ par rapport à sa première variable.

3.2.1 Comportement du noyau près de la diagonale

On dispose du théorème suivant, qui donne le comportement asymptotique du noyau S_N dans un voisinage de la diagonale à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{N}}$. A cette échelle, le terme dominant du noyau de Szegő est universel au niveau des formes volumes, et est donné, dans une bonne carte, par :

$$\Pi_H(u, \theta, v, \varphi) := \pi^{-n+1} \exp\left(i(\theta - \varphi) + i \operatorname{Im}(u\bar{v}) - \frac{1}{2}|u - v|^2\right) dV$$

où dV est la forme volume sur \mathbb{C}^n .

Plus précisément, on a :

Théorème 7 (Shiffman-Zelditch). Soit $P_0 \in X$, et ρ une carte locale de coordonnées de Heisenberg autour de P_0 . On définit $S_N^{P_0}(u, \theta, v, \varphi) = S_N(\rho(u, \theta), \rho(v, \varphi))(\rho^*\omega)^{\wedge n}$. Soit $K > 0$, alors on a :

$$N^{-n+1} S_N^{P_0}\left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \frac{\theta}{N}, \frac{v}{\sqrt{N}}, \frac{\varphi}{N}\right) = \Pi_H(u, \theta, v, \varphi) \left(1 + \sum_{r=1}^K N^{-r/2} b_r(u, v) + N^{-(K+1)/2} R_K(u, v, N)\right)$$

Où $\|R_K(u, v, N)\|_{C^j(\{|u|<r, |v|<r\})} \leq C_{K,j,r}$, indépendamment de P_0 .

Démonstration. On expose schématiquement la preuve proposée dans [SZ02]. Pour des raisons de lourdeur, les estimations explicites sur les restes ne seront pas reprises.

Par S^1 -équivariance, il suffit de considérer les cas où $\theta = \varphi = 0$. La notation θ sera à présent utilisée pour une variable muette d'intégration sur la fibre. Le théorème de Boutet et Sjöstrand nous donne, pour un certain symbole s^{P_0} , et après changement de variable :

$$S_N^{P_0} \left(\frac{u}{\sqrt{N}}, 0, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0 \right) = N \iint e^{iN(-\theta + t\psi(\frac{u}{\sqrt{N}}, \theta, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0))} s^{P_0} \left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \theta, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0, Nt \right) d\theta dt.$$

Le symbole s^{P_0} est classique et admet un développement asymptotique jusqu'à tout ordre K fixé :

$$\begin{aligned} s^{P_0} \left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \theta, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0, Nt \right) &= N^{n-1} \frac{\sqrt{\det L_X}}{4\pi^n} \frac{4\pi}{\sqrt{\det L_X}} \\ &\quad + N^{n-1} \sum_{k=0}^K N^{-k} s_k^{P_0}(u, \theta, v, \varphi) \\ &\quad + O(N^{n-K'-2}). \end{aligned}$$

Et on va appliquer le lemme de phase stationnaire à chaque terme. Commençons par le premier terme, d'ordre N^{n-1} . On rappelle que

$$\psi(u, \theta, v, 0) = i \left(1 - \frac{a(u, v)}{\sqrt{a(u)}\sqrt{a(v)}} e^{i\theta} \right),$$

et qu'à ce titre, en vertu du développement asymptotique de a au voisinage de la diagonale, la phase dans l'intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &:= t\psi \left(\frac{u}{\sqrt{N}}, \theta, \frac{v}{\sqrt{N}}, 0 \right) - \theta \\ &= it(1 - e^{i\theta}) - \theta - \frac{it}{N} e^{i\theta} \left(u \cdot \bar{v} - \frac{|u|^2 + |v|^2}{2} \right) + te^{i\theta} O(N^{-3/2}). \end{aligned}$$

On note $\Psi(t, \theta) = it(1 - e^{i\theta}) - \theta$. La phase dans l'intégrale définissant $S_N^{P_0}$ se décompose donc en une phase oscillante $e^{iN\Psi}$, à laquelle on va appliquer le lemme de phase stationnaire, et une phase non oscillante qu'on va incorporer dans le symbole. Pour se débarrasser des ennuis quand $t \rightarrow +\infty$, on va également décomposer l'intégrale en une intégrale sur $[0, 3]$ et une intégrale sur $[2, +\infty[$, avec une partition de l'unité ρ_1, ρ_2 adaptée. Posons :

$$A(t, \theta, u, v, N) = \rho_1(t) e^{iN(\tilde{\Psi} - \Psi)},$$

Et appliquons le lemme de phase stationnaire à l'intégrale :

$$N \int_0^3 \int_0^{2\pi} e^{iN\Psi(t, \theta)} A(t, \theta, u, v, N) d\theta dt$$

(qui est l'intégrale du terme dominant, à une constante $\frac{1}{\pi^{n-1}}$ près).

Le seul point critique de Ψ est en $t = 1, \theta = 0$, et la hessienne en ce point est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, de déterminant -1 . Le lemme de phase stationnaire donne :

$$I_1(u, v, N) = \sqrt{-2i\pi} \sum_{r=0}^K N^{-r} L_r(A)(1, 0, u, v, N) + R_K(u, v, N)$$

Ici L_r est un opérateur d'ordre $2r$ qui n'agit que sur les variables t et θ , et $L_0 = Id$.

Ceci nous donne bien le développement asymptotique souhaité, il ne reste plus qu'à vérifier que l'autre morceau, $S_N^{P_0}$, est d'ordre $N^{-\infty}$. Mais sur $[2, +\infty[$, la différentielle de Ψ est uniformément loin de 0 quand N est grand, ce qui permet de conclure par le lemme de phase non stationnaire.

Le premier terme est donc $\sqrt{2i\pi}A(1, 0, u, v, \infty) = 1$.

On peut appliquer le même raisonnement aux autres termes du développement de s^{P_0} , qui ne vont créer que des termes d'ordre plus petit. \square

3.2.2 Applications à Kodaira et Tian

Le théorème précédent nous redonne directement l'asymptotique de S_N sur la diagonale qui permet de démontrer que l'application de Kodaira existe, et qu'elle est quasi-isométrique (c'est donc a fortiori un plongement). Pour démontrer que cette application est injective, Shiffman et Zelditch citent une idée de Bouche, que nous ré-exposons ici. On sait qu'en particulier, pour tout point $P \in X$, la fonction $x \mapsto S_N(P, x)$ est dans $H_N^2(X)$ et de norme 1. Par ailleurs, si P_N et Q_N ont la même image par le plongement de Kodaira, alors en particulier $S_N(P_N, x) = S_N(Q_N, x)$ pour tout x . Supposons qu'un tel couple (P_N, Q_N) existe pour une infinité de valeurs de N , quitte à extraire on peut raisonner par disjonction de cas : notons d la distance riemannienne ou kählerienne sur X :

- Si $\sqrt{N}d(P_N, Q_N) \rightarrow +\infty$, alors par le théorème de la section précédente, on sait que $N^{1-n} \int_{B(P_N, dist(P_N, Q_N)/2)} |S_N^{P_N}|^2 > 1 - o(1)$, de même pour Q_N . Dans ce cas, la norme L^2 de $S_N(x, \cdot)$ est au moins $2N^{(1-n)/2}$, ce qui contredit l'asymptotique du théorème de Zelditch.
- Si $\sqrt{N}d(P_N, Q_N) \leq C$, alors l'expression asymptotique de S_N autour de la diagonale, à l'échelle $1/\sqrt{N}$ donne $S_N(P_N, Q_N) \neq N^{1-n}$, or $N^{1-n} = S_N(Q_N, Q_N)$, et a fortiori, il est interdit que les fonctions $S_N(P_N, \cdot)$ et $S_N(Q_N, \cdot)$ soient identiques

Ce qui conclut la preuve de l'injectivité, on vient donc de démontrer le théorème de Kodaira.

On dispose donc d'un plongement symplectique de variétés à classe de cohomologie entière, dans une variété bien connue. Nous aimerions citer une remarque de S. Kharlamov, par analogie avec les pinceaux de Lefschetz : en pullbackant l'intersection de l'image de la variété avec un sous-espace projectif de dimension paire, on obtient, sous condition de transversalité, des familles de sous-variétés symplectiques de

dimension quelconque. L'intérêt est qu'il est en général très difficile de construire des sous-variétés symplectiques d'une variété donnée.

CONCLUSION

Les applications du théorème de Kodaira en géométrie complexe sont nombreuses. Un théorème de Chow assure en particulier que toute sous-variété complexe de $\mathbb{C}P^N$ est une variété algébrique, permettant une classification très rigide des variétés kählériennes à classe de cohomologie entière. La validité du théorème de Kodaira, *mutatis mutandis*, dans le cadre symplectique, pourrait permettre d'aider à la classification des variétés symplectiques.

La forme précisée du noyau de Szegő, qui fait l'objet du théorème 7, permet par ailleurs de définir et d'étudier une forme de quantification, dite *quantification de Toeplitz*. Sur une variété munie d'une structure de Toeplitz, et en particulier de la suite de projecteurs S_N , on peut associer à une fonction lisse h l'opérateur $H_N = S_N M_h S_N$, où M_h est l'opérateur de multiplication par le pullback de h sur le fibré en cercles. En particulier, si la variété est la sphère $\mathbb{C}P^1$, alors ce procédé est cohérent avec les modèles de spins.

Une étude récente [LF14] permet de relier, dans le cas d'une courbe complexe, le spectre de H_N aux propriétés géométriques de h (points critiques et longueur des orbites périodiques du flot). Les résultats de [BPU98] permettent, eux, de mieux comprendre le spectre de H_N aux énergies qui sont des valeurs régulières de h .

Il semble naturel d'essayer de compléter ces résultats par une étude aux énergies proches de $\min(h)$. Un calcul formel semble conforter une conjecture faite par analogie avec [Hel88], au moins dans le cas le plus simple :

Conjecture 1. Soit $h \geq 0$ admettant un seul point d'annulation, tel que la hessienne de h en ce point soit définie positive. Alors pour N assez grand, $s_N = \min \text{Sp } H_N$ est une valeur propre simple ; il existe un réel strictement positif λ_0 qui ne dépend que de la hessienne de h en ce point, et une suite (λ_i) de réels, tels que pour tout K , $s_N = N^{-1}(\lambda_0 + \sum_{k=1}^K N^{-k} \lambda_k) + O(N^{-K-2})$. Par ailleurs il existe une constante C telle que s_N est le seul élément de $\text{Sp } H_N$ dans $]N^{-1}\lambda_0 - CN^{-3/2}, N^{-1}\lambda_0 + CN^{-3/2}[$.

Par ailleurs, la suite de fonctions propres normalisées associées à s_N se concentre uniquement en l'unique point d'annulation de h .

Lorsque h s'annule en un nombre fini d'endroits, à chaque fois de manière non dégénérée, on peut établir une conjecture similaire. En

particulier, la suite des fonctions propres normalisées associées à l'état fondamental ne semble se concentrer qu'en les points qui minimisent λ_0 , donc dont la hessienne est "plus petite", un phénomène de sélection attesté dans le cas des opérateurs de Schrödinger.

On peut alors légitimement se demander s'il existe des phénomènes de type effet tunnel (dans le cas d'un double puits, les deux premières valeurs propres pourraient être exponentiellement proches), ou encore des effets de seconde quantification, si l'ensemble sur lequel h est nul est une sous-variété.

APPENDICE : NOTIONS DE GÉOMÉTRIE COMPLEXE

A.1 STRUCTURES DE CAUCHY-RIEMANN

A.1.1 Complexification de l'espace tangent et définitions

Soit M une variété complexe, de dimension complexe n . La variété TM est un fibré vectoriel réel sur M , de dimension $2n$, mais on souhaite travailler sur une structure vectorielle complexe.

Pour cela on considère le complexifié de TM , que l'on note (un peu abusivement) $TM \otimes \mathbb{C}$. L'une des motivations est la suivante : si $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, seules les formes $d\Re f$ et $d\Im f$ ont un sens dans T^*M . La forme $df = d\Re f + id\Im f$ agit naturellement, elle, sur $TM \otimes \mathbb{C}$.

Dans une carte locale, en notant $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ les coordonnées réelles dans \mathbb{C}^n , une base complexe de $TM \otimes \mathbb{C}$ est l'ensemble :

$$\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_n\}.$$

Cette base n'est cependant pas très adaptée à la structure de variété complexe. On considère donc les vecteurs :

$$\partial/\partial z_j = \partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j$$

$$\partial/\partial \bar{z}_j = \partial/\partial x_j + i\partial/\partial y_j.$$

Ils forment également une base de $TM \otimes \mathbb{C}$, mais plus intéressante. En effet, on sait qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe ssi, en tout point de M , pour tout j , on a $df(\partial/\partial \bar{z}_j) = 0$. Alors l'espace engendré par les $\partial/\partial z_j$, qu'on notera $T^{1,0}M$, a un sens intrinsèque, puisque les changements de cartes sont holomorphes; on l'appelle *espace des vecteurs holomorphes*. Il est fermé pour le crochet de Lie. On notera $T^{0,1}M$ son conjugué complexe, engendré localement par les vecteurs $\partial/\partial \bar{z}_j$.

On appelle J l'opérateur \mathbb{C} -linéaire sur $TM \otimes \mathbb{C}$ qui vérifie

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$$

$$J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j$$

Alors l'opérateur $P = 1/2(\text{Id} + iJ)$ a deux valeurs propres, 0 et 1, et $T^{1,0}M$ est l'espace propre associé à 1 tandis que $T^{0,1}M$ est l'espace propre associé à 0.

On peut par ailleurs définir un opérateur $\bar{\partial}$, qui n'est rien d'autre que la restriction de d à $T^{0,1}M$. Une fonction est alors holomorphe ssi elle est dans le noyau de $\bar{\partial}$.

Si U est un ouvert de M à bord lisse, on aimerait étudier le bord $\partial U = X$ en utilisant la structure complexe de M . Malheureusement, X ne peut pas être une variété complexe, puisque c'est une variété réelle de dimension impaire. On peut néanmoins étudier la *structure de Cauchy-Riemann* de f .

L'expression « à bord lisse » signifie par définition qu'il existe une fonction réelle ρ , lisse sur M , telle que $U = \{\rho < 0\}$, ainsi que $X = \{\rho = 0\}$, et telle que $d\rho$ ne s'annule pas sur X . Sous ces conditions, l'espace tangent de la sous-variété réelle X vaut $TX = \{(x, \xi) \in TM, x \in X, d\rho(\xi) = 0\}$.

Il est alors naturel d'étudier $TX \otimes \mathbb{C}$ selon la décomposition de $TM \otimes \mathbb{C}$ en vecteurs holomorphes et antiholomorphes.

Définition A.1. On pose $T'X = \{(x, \xi) \in T^{1,0}M, x \in X, d\rho(\xi) = 0\} \subset TX \otimes \mathbb{C}$, et $T''X = \overline{T'X}$.

Remarque A.2. La variété $T'X$ est un fibré vectoriel complexe sur X , de dimension $n-1$, fermé pour le crochet de Lie. En particulier, $T'X \oplus T''X \subsetneq TX \otimes \mathbb{C}$ car il manque une dimension.

Opérateur de Cauchy-Riemann

De même que, sur M , l'opérateur d permet de définir $\bar{\partial}$ par restriction, on peut créer un opérateur $\bar{\partial}_b$ sur X à partir de $T'X$.

On commence par noter $\Omega^{p,q}(X)$ l'ensemble des (p, q) -formes tangentées à X , donc l'espace des sections lisses du fibré dual de $(T'X)^{\wedge p} \wedge (T''X)^{\wedge q}$. On veut définir une application de restriction, des formes de $\Omega^{p,q}(\text{Vois}(U))$ vers les formes de $\Omega^{p,q}(X)$. Pour cela restreindre la section à X n'est pas suffisant, il faut encore restreindre la forme linéaire en x à $(T'X_x)^{\wedge p} \wedge (T''X_x)^{\wedge q}$. On appelle μ cette restriction totale.

Bien sûr, dans le cas d'une fonction, on a $f|_X = \mu f$, mais ce n'est pas vrai pour les formes de degré quelconque, on a par exemple $\mu \bar{\partial} \rho = 0$. Précisons qu'on a $\mu(\alpha \wedge \beta) = \mu \alpha \wedge \mu \beta$. On peut alors démontrer :

Lemme A.3. Si $\varphi, \psi \in \Omega^{p,q}(\text{Vois}(U))$ avec $\varphi|_X = \psi|_X$, alors $\mu \bar{\partial} \varphi = \mu \bar{\partial} \psi$.

Démonstration. Si φ et ψ sont égales sur X , alors il existe une forme θ vérifiant $\varphi - \psi = \rho \theta$. On a alors :

$$\mu \bar{\partial}(\varphi - \psi) = \mu(\rho \bar{\partial} \theta + \bar{\partial} \rho \wedge \theta) = 0.$$

□

On peut alors écrire de manière univoque :

Définition A.4. On définit l'application $\bar{\partial}_b : \Omega^{p,q}(X) \mapsto \Omega^{p,q+1}$ de la manière suivante : à une forme φ on associe la forme $\mu\bar{\partial}\tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi} \in \Omega^{p,q}(\text{Vois}(U))$ vérifie $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$.

Remarque A.5. Dans le cas qui nous intéresse le plus, celui de $C^\infty(X)$, on a $\bar{\partial}_b f = 0 \iff (\forall \xi \in T''X, df(\xi) = 0)$.

A.1.2 Equation de Cauchy-Riemann et valeur au bord de fonctions holomorphes

Le but de cette section est d'établir le lien entre les fonctions dans le noyau de $\bar{\partial}_b$, et les fonctions valeur au bord de fonctions holomorphes à l'intérieur.

Ici, U est un ouvert d'une variété complexe M , et son bord $\partial U = X$ est supposé lisse. Un premier résultat est immédiat :

Proposition A.6. Si $f \in C^\infty(\bar{U})$ est holomorphe dans U , alors $g = f|_X$ vérifie $\bar{\partial}_b g = 0$.

Démonstration. Pour tout vecteur antiholomorphe ξ dont la base est dans U , on a $df(\xi) = 0$; donc par continuité, c'est encore vrai pour des vecteurs antiholomorphes dont le point de base est dans X , et en particulier pour les vecteurs de $T''X$. \square

La réciproque de cette affirmation est vraie pour des ouverts de \mathbb{C}^n , avec $n \geq 2$, même en n'imposant qu'une régularité C^1 :

Proposition A.7. Supposons que $M = \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$, et supposons que X est connexe et que U est borné. Alors toute fonction $f \in C^1(X)$ vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$ vérifie $f = g|_X$ avec g de classe C^∞ jusqu'au bord, et holomorphe à l'intérieur.

Démonstration. La preuve utilise la notion de *courant*, qui est l'équivalent des distributions pour les formes.

On commence par considérer n'importe quelle extension g_0 de f dans \bar{U} , de classe C^1 . On étend $\bar{\partial}g_0$ à \mathbb{C}^n par 0 en dehors de U . Ce courant est alors $\bar{\partial}$ -fermé, en effet, pour toute $(n, n-2)$ -forme α à support compact sur \mathbb{C}^n , on a, par intégrations par parties :

$$\int_U \bar{\partial}g_0 \wedge \bar{\partial}\alpha = \int_X \bar{\partial}_b f \wedge \alpha - \int_U \bar{\partial}\bar{\partial}g_0 \wedge \alpha = 0.$$

Or, sur \mathbb{C}^n , les courants fermés à support compacts sont exacts, donc il existe un courant h sur \mathbb{C}^n tel que $1_U \bar{\partial}g_0 = \bar{\partial}h$. Plus précisément, l'opérateur $\bar{\partial}$ admet un inverse depuis l'espace des courants fermés à support compact, inverse qui s'écrit par une formule intégrale faisant intervenir le noyau de Bochner-Martinelli.

On considère en effet l'intégrale suivante :

$$h(z) = C(n) \int_U \frac{\bar{\partial}g_0(\xi)}{|\xi - z|^{2n}} \wedge \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (\bar{\xi}_j - \bar{z}_j) d^* \bar{\xi}_j \right) \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

où on a introduit les notations suivantes :

$$C(n) = \frac{1}{(-1)^{n(n-1)/2} (2i)^n n \text{Vol}(B(0,1))}$$

$$d^* \bar{\xi}_j = d\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_{j-1} \wedge d\bar{\xi}_{j+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_n.$$

Un calcul, réalisé par exemple dans [Kra13] montre qu'on a alors $\bar{\partial}h = 1_U \bar{\partial}g$.

On en déduit deux choses. D'une part, comme $1_U \bar{\partial}g_0$ est un courant L^∞ à support compact, il est en fait continu pour la topologie C^0 . En particulier, h est continu. D'autre part, le noyau de Bochner-Martinelli qui apparaît décroît avec la distance, donc h tend vers 0 en l'infini.

C'est ici que la condition $n \geq 2$ est cruciale : h est holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble borné, or $\mathbb{C}^n \setminus B(0, R)$ est l'union de droites complexes. Sur chacune de ces droites complexes, h est holomorphe et tend vers 0 en l'infini, donc est nulle. Par unique extension holomorphe, h est nulle en-dehors de U , et en particulier, h est nulle sur X .

La fonction $g = g_0 - h$ a donc toutes les propriétés requises : elle est continue sur \bar{U} , holomorphe à l'intérieur, et sa valeur au bord vaut f . \square

Tous les arguments utilisés dans cette preuve sont assez standards ; malheureusement, la généralisation à des ouverts de variétés quelconques est impossible, car les courants fermés n'y sont pas exacts.

La généralisation à des fonctions moins régulières est également problématique : si le courant h qu'on utilise pour corriger g_0 n'est pas continu, alors il peut être non nul sur X . Il existe effectivement des contre-exemples à la résolubilité de $\bar{\partial}_b$ en faible régularité, cf [KR65].

A.1.3 Structure presque complexe et presque Cauchy-Riemann

On souhaite généraliser les constructions précédentes dans le cas où la variété de départ M est seulement *symplectique*, et on appelle ω la forme symplectique.

On supposera toujours (on peut toujours construire une telle structure) que TM est muni d'un opérateur J linéaire sur chaque fibre, continu transversalement, vérifiant $J^2 = -Id$, et tel que $\omega(\cdot, J\cdot)$ soit définie positive. On appelle alors (M, ω, J) une *variété symplectique presque complexe*.

On peut également complexifier TM de manière inoffensive. On observe alors que $P = 1/2(Id + iJ)$ est un projecteur, dont le noyau et l'image ont la même dimension car ils sont l'image l'un de l'autre par la conjugaison complexe. On note $T^{1,0}M = Im(P)$ et $T^{0,1}M = Ker(P)$. Les éléments de $T^{1,0}M$ sont appelés *vecteurs presque holomorphes*. On peut alors construire des (p, q) -formes, et des opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ comme précédemment.

La différence majeure avec le cas complexe réside dans le fait qu'en général, on n'a pas $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$. Pour mesurer cette différence, on introduit le tenseur de Nijenhuis :

Définition A.8. Si X et Y sont deux champs de vecteurs lisses sur M , on définit le champ de vecteurs :

$$N(X, Y) = [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY].$$

Si J est défini par une structure complexe, un calcul en coordonnées locales montre que $N(X, Y)$ est toujours nul.

Ce tenseur mesure bien le défaut d'intégrabilité du sous-fibré $T^{1,0}X$. En effet, si X et Y sont presque holomorphes, alors $N(X, Y)$ est presque antiholomorphe. Il existe des exemples naturels de variétés presque complexes, dont le tenseur de Nijenhuis est non-nul. La sphère S^6 s'identifie à l'ensemble des octonions imaginaires purs de norme 1. La multiplication par i donne naissance à une structure presque complexe, et on peut vérifier que le tenseur de Nijenhuis est non nul dans ce cas.

On dispose du

Théorème 8 (Newlander-Nirenberg). M est une variété complexe, et J la structure compatible, ssi $T^{1,0}M$ est fermé pour le crochet de Lie, ssi $N \equiv 0$.

Les implications de la gauche vers la droite sont immédiates, de même l'implication $N \equiv 0 \Rightarrow [T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$ ne nécessite qu'un calcul direct. La dernière implication ne sera pas démontrée. Elle est une conséquence des résultats sur $\bar{\partial}$ démontrés dans [Koh63].

Enfin, si U est un ouvert de M à bord lisse X , on peut munir comme précédemment X d'une structure presque Cauchy-Riemann, en définissant :

$$T'X = \{(x, \xi) \in T^{1,0}M, x \in X, d\rho(\xi) = 0\}$$

où ρ est une fonction qui définit X , dont le choix n'a pas d'importance.

La structure presque Cauchy-Riemann n'a pas d'intérêt a priori, puisque le défaut d'intégrabilité entraîne en général qu'il n'y a pas de solution non constante à l'équation $\bar{\partial}_b f = 0$.

A.2 PSEUDOCONVEXITÉ

On se propose ici de redonner les définitions de base de la pseudoconvexité, et quelques lemmes utiles.

La recherche d'analogues, en structure complexe, à la convexité des fonctions et des ensembles, a mené à plusieurs notions, qui se recourent les unes les autres ; les difficultés de traductions (de *positive* à *strictement positif*) compliquent encore la nomenclature. Le but de cette section est double : le lecteur peu familier avec ces notions pourra trouver ici les définitions de base des notions que nous utilisons dans ce mémoire, et nous le redirigeons volontiers vers les ouvrages de référence ([Kra92], [Voi02], [Dem97]) pour un exposé plus en détail ; et nous donnons au lecteur averti une définition précise du vocabulaire utilisé.

A.2.1 Fonctions pluri-sous-harmoniques

On abrégera systématiquement en *psh* cet adjectif ; par ailleurs, Δ désignera systématiquement le disque unité ouvert de \mathbb{C} .

La définition qui va suivre s'approche beaucoup de celle des fonctions convexes :

Définition A.9. Soit U un ouvert de \mathbb{C} , et $p : U \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que p est *psh* lorsque p est semi-continue supérieure (c'est-à-dire : $\limsup p(u_n) \leq p(u)$ dès que $u_n \rightarrow u$), et telle que pour toute application \mathbb{C} -affine $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\varphi(\overline{\Delta}) \subset U$, on ait

$$p(\varphi(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} p(\varphi(e^{i\theta})) d\theta. \quad (13)$$

Remarque A.10. On peut remplacer (13) par une moyenne sur l'image de Δ . Par ailleurs, si p est *psh*, la fonction suivante est croissante :

$$M_\varphi : [0, \sup\{\lambda, \varphi(\lambda\Delta) \subset \Omega\}[\mapsto \mathbb{R} \\ r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} p(\varphi(re^{i\theta})) d\theta.$$

D'après la définition, une limite décroissante de fonctions *psh* est *psh*. Réciproquement, on peut approcher toute fonction *psh* par une suite décroissante de fonctions *psh* régulières :

Proposition A.11. Soit p *psh* sur un ouvert U , non identiquement égale à $-\infty$. Alors il existe (p_n) , une suite décroissante de fonctions *psh* à valeurs dans \mathbb{R} , de classe C^∞ , vérifiant $p = \lim p_n$.

Démonstration. L'idée clé est de faire convoler p avec une fonction régularisante. Si f est positive et C_c^∞ sur \mathbb{C} , alors $p * f$ est de classe C^∞ , et psh sur U . Soit alors f_n une approximation de l'unité à symétrie sphérique. Alors la suite $p * f_n$ est décroissante, d'après la remarque précédente, et sa limite simple est bien p . \square

En général, une limite croissante de fonctions psh n'est pas psh, parce qu'elle n'est pas semi-continue supérieurement.

Lorsqu'une fonction f est régulière, on sait traduire la convexité sur le comportement des dérivées d'ordre 2 de f (à savoir, Hess f est positive). Le même raisonnement s'applique pour les fonctions psh de classe C^2 . En effet, lorsque p est psh sur un ouvert U , pour φ une application \mathbb{C} -affine avec $\varphi(\Delta) \subset U$, on sait que $p \circ \varphi$ est sous-harmonique sur Δ . Autrement dit, en notant $\omega = \varphi(1)$, on a, sur l'image de Δ :

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \omega_j \bar{\omega}_k \geq 0.$$

On définit alors la hessienne complexe d'une fonction f par :

$$H_f(x)(v, \xi) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{\xi}_k.$$

Une fonction régulière ssi sa hessienne complexe est positive en tout point. En appliquant la propriété de régularité, on arrive à généraliser ce résultat en :

Proposition A.12. Soit p une distribution sur U , alors p est psh sur U , non identiquement $-\infty$, ssi H_p est une mesure positive.

La hessienne complexe se comporte correctement par des biholomorphismes. En effet, un calcul direct montre que

$$H_{p \circ \psi}(\xi) = H_p(d\psi(\xi)).$$

Ceci permet de définir H_p sur une variété M , en tant que forme hermitienne sur $T^{1,0}M$. En particulier, le caractère pseudoconvexe est invariant par biholomorphisme.

Définition A.13. Soit U un ouvert d'une variété complexe, et p une fonction sur U à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que p est psh lorsqu'elle est psh dans les cartes locales.

Le lemme technique suivant sera utile :

Lemme A.14 (Cf [Dem97]). Soit $p : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi-continue supérieurement. Alors p est psh ssi, pour tout disque $K = \{z_0 + z\eta, z \in \bar{\Delta}\}$, et pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$\forall z \in S^1, p(z_0 + z\eta) \leq \Re(P(z)) \Rightarrow \forall z \in \Delta, p(z_0 + z\eta) \leq \Re P(z).$$

Démonstration. Soit $\varphi : z \mapsto z_0 + z\eta$. Si p est psh, alors $p \circ \varphi - P$ est sous-harmonique sur $\bar{\Delta}$, donc son maximum est atteint sur le cercle.

Réciproquement, pour K fixé, puisque p est scs, il existe une suite décroissante de polynômes trigonométriques $p_n = \Re(P_n)|_{S^1}$, avec $P_n \in \mathbb{C}^n[X]$, tels que $p \circ \varphi = \lim p_n$ sur S^1 . Alors $p \circ \varphi \leq \Re(P_n)$. Si l'hypothèse est vraie, alors en particulier, on a :

$$p(z_0) \leq \Re(P_n(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \Re(P_n(e^{i\theta})) d\theta.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient bien l'inégalité de la définition. \square

A.2.2 Ouverts pseudoconvexes

Définition A.15. Un ouvert U d'une variété est dit *pseudoconvexe* lorsqu'il existe une fonction psh p sur U qui vérifie que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\{p \leq c\}$ est un compact de U . Une telle fonction est appelée *fonction d'exhaustion*.

Les ouverts pseudoconvexes de \mathbb{C}^n jouissent de propriétés géométriques particulières. On note dorénavant d la distance euclidienne dans \mathbb{C}^n . Alors :

Proposition A.16. Soit U un ouvert pseudoconvexe de \mathbb{C}^n . Alors la fonction $z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$ est psh sur U .

Remarque A.17. La fonction précédente ne convient pas toujours comme fonction d'exhaustion. En effet, pour $c > 0$, l'ensemble $\{d(x, {}^c U) \geq c\}$ n'est pas compact en général.

Démonstration. Encore une fois, on suit la preuve de [Dem97]. Commençons par démontrer que la fonction suivante est pseudoconvexe sur son domaine de définition :

$$f : U \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$(z, \xi) \mapsto -\log(\sup\{r > 0, \forall |t| < r, z + t\xi \in U\}).$$

Pour cela on va utiliser le lemme A.14. Si $K = (x, \xi) + (\zeta, \eta)\Delta \subset U \times \mathbb{C}^n$, et si P est un polynôme vérifiant

$$\forall t \in S^1, f(z + t\zeta, \xi + t\eta) \leq P(t),$$

Alors on va vérifier que cette équation est vraie pour tout $t \in \Delta$. Pour cela on considère la fonction holomorphe auxiliaire suivante :

$$h : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^n$$

$$(t, w) \mapsto z + t\zeta + we^{-P(t)}(\xi + t\eta).$$

Par construction, d'une part, $h(\Delta \times \{0\}) = \{z + t\zeta, |t| < 1\} \subset U$, et d'autre part, par définition de f , on sait que $h(S^1 \times \Delta) \subset U$.

Soit alors R le sup des $r \geq 0$ tels que $h(\Delta \times r\Delta) \subset U$. Si par l'absurde $R < 1$, on pose $K = h(S^1 \times R\Delta) \subset\subset U$; or U est pseudoconvexe, donc en appelant p une fonction exhaustive de U , alors $c = \sup_K(p) < +\infty$. Par ailleurs $p \circ h$ est psh, donc sous-harmonique par rapport à sa première variable, donc cette fonction ne peut pas être plus grande sur $\Delta \times R\Delta$ que sur $S^1 \times R\Delta$. En particulier, $h(\Delta \times R\Delta) \subset\subset U$ par connexité, donc on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que $h(\Delta \times (R + \epsilon)\Delta) \subset U$, ce qui est absurde.

La fonction $q : z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$ est continue, et vérifie par définition $q(z) = \sup_{|\xi| < 1} f(x, \xi)$, donc est pseudoconvexe. \square

A.2.3 Pseudoconvexité et frontière

Le dernier résultat de la section précédente nous indique que la pseudoconvexité est une propriété qui concerne uniquement la *frontière* d'un ouvert de \mathbb{C}^n . Plus précisément,

Proposition A.18. Un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe ssi, pour tout point $x \in \partial U$, il existe un voisinage de x dans \mathbb{C}^n tel que $V \cap U$ soit pseudoconvexe.

Démonstration. L'implication directe est immédiate (on prend $V = \mathbb{C}^n$). Démontrons l'implication réciproque. Dans un petit voisinage W de x , on a $d(\cdot, {}^c U) = d(\cdot, {}^c (U \cap V))$. En particulier, la fonction $z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$ est psh dans un voisinage du bord noté $U \setminus U'$, où $U' \subset U$. Mais cette fonction n'est pas nécessairement psh dans U' .

Supposons sans perte de généralité que $0 \in U'$, et soit χ une fonction continue convexe sur \mathbb{R}^+ , telle que :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \chi(r) \leq \sup(-\log(d(z, {}^c U)), z \in B(0, r \cap (U \setminus U'))).$$

Alors la fonction $p : z \mapsto \max(\chi(|z|), -\log(d(z, {}^c U))$ est continue, pseudoconvexe, car elle coïncide avec $\chi(|\cdot|)$ sur un voisinage de $U \setminus U'$, et exhaustive, car elle coïncide avec $-\log(d(\cdot, {}^c U))$ près du bord, donc convient. \square

On aimerait donc trouver une caractérisation géométrique du bord de U , équivalente à la pseudoconvexité lorsque le bord est lisse.

Si un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ a un bord lisse, avec ρ est une fonction qui définit $\partial U = X$, alors X n'est bien sûr pas une variété complexe (sa dimension réelle est impaire). On notera respectivement $T'X$ et $T''X$ les espaces tangents holomorphes et antiholomorphes (cf section précédente). On rappelle également qu'on note J l'application qui envoie $\partial/\partial x_j$ sur $\partial/\partial y_j$ et $\partial/\partial y_j$ sur $-\partial/\partial x_j$.

On peut alors définir la *forme de Lévi* :

Définition A.19. Soit $x \in X$. La forme de Lévi en x est la forme sesquilinéaire sur $T'_x X$ définie par :

$$L_{X,x}(\xi, \eta) = \frac{1}{\|d\rho(x)\|} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_k \eta_j.$$

L_x n'est rien d'autre que la hessienne complexe de ρ , restreinte à $T'X$, et normalisée. Cette normalisation rend la définition intrinsèque : elle ne dépend ni de ρ ni des coordonnées locales, comme nous allons le montrer.

On note d'abord $\nu = d\rho/\|d\rho\|$ le champ des vecteurs normaux sortants sur X , qui ne dépend pas de ρ . On a alors :

Proposition A.20. Soient ξ et η des champs de vecteurs sur X au voisinage de x , à valeurs dans $T'X$. Alors :

$$\langle J\nu, [\xi, \eta] \rangle = 4\text{Im}(L_X(\xi, \eta)).$$

Démonstration. Le calcul en coordonnées locales est direct. □

On dispose alors de la caractérisation suivante :

Proposition A.21. Un ouvert de \mathbb{C}^n de frontière C^2 est pseudoconvexe ssi sa forme de Lévi est positive en tout point de la frontière.

Démonstration. Il suffit de montrer, ou de supposer, qu'au voisinage de chaque point $x \in \partial U$, l'ouvert U est pseudoconvexe.

Démontrons le sens direct. La fonction $\rho : z \mapsto -d(z, {}^c U)$ est de classe C^2 au voisinage de x . La hessienne complexe de $-\log(-\rho)$ vaut exactement :

$$H_{-\log(-\rho)}(\xi, \eta) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{|\rho|} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k} \right) \bar{\eta}_k \xi_j.$$

Donc si $-\log(-\rho)$ est psh et si un vecteur $\xi \in TC^n \otimes \mathbb{C}$ est dans U et orthogonal à $(\partial\rho, 0)$ alors la quantité qu'on veut est positive ; par passage à la limite (ρ est régulière), c'est toujours vrai pour des vecteurs dans $T^h \partial U$.

Pour la réciproque, on se reporte à [Dem97]. □

Ayant caractérisé la pseudoconvexité par la positivité d'une forme sur la frontière, il est naturel de définir une notion plus restrictive en imposant la stricte positivité de cette forme.

Définition A.22. On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, de frontière C^2 , est *fortement pseudoconvexe* lorsque la forme de Lévi est définie positive en tout point de la frontière de U .

A.2.4 Exemples

On conclut cette section par quelques exemples de variétés pseudoconvexes, éventuellement fortement.

Exemple A.23. Tout ouvert connexe de \mathbb{C} est pseudoconvexe.

Démonstration. Si $U = \mathbb{C}$, la fonction $p : z \mapsto |z|^2$ convient.

Sinon, on commence par constater que la fonction $z \mapsto -\log(d(z, 0)) = -2\log(|z|)$ est psh sur \mathbb{C}^* . La fonction $p_1 : z \mapsto -\log(d(z, {}^c U))$, qui est continue, est donc psh car c'est un sup de fonctions psh.

Malheureusement, p_1 ne convient pas toujours, par défaut de compacité des $\{p_1 \leq c\}$. On pose donc $p : z \mapsto p_1(z) + |z|^2$, qui convient. \square

La situation reste donc assez différente de la convexité. La question de la forte pseudoconvexité ne se pose pas pour les ouverts de \mathbb{C} , puisque la forme de Lévi est alors la forme nulle sur l'espace nul.

Exemple A.24. Pour $n \geq 2$, la boule unité de \mathbb{C}^n est fortement pseudoconvexe.

Démonstration. C'est un ouvert de \mathbb{C}^n à bord lisse. La fonction $\rho : z \mapsto |z|^2 - 1$ définit cet ouvert, et sa hessienne complexe au bord vaut $H_z(\eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle$, qui est définie positive. \square

Exemple A.25. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ n'est pas pseudoconvexe.

Démonstration. Cet ouvert est biholomorphe à $\mathbb{C}^n \setminus B(0, 1)$, dont la frontière est lisse, mais dont la hessienne au bord est définie négative. \square

Exemple A.26. Pour $n \geq 2$, le demi-espace $\{\operatorname{Im} z_n < 0\}$ est pseudoconvexe mais pas fortement pseudoconvexe.

Démonstration. La fonction $\rho : z \mapsto \operatorname{Im}(z_n)$ définit cet ouvert, sa forme de Lévi sur la frontière est positive mais pas définie positive. \square

Le dernier exemple montre qu'on ne peut attendre a priori aucune propriété géométrique naturelle partagée par tous les ouverts pseudoconvexes :

Exemple A.27. Toute variété complexe compacte est pseudoconvexe.

Démonstration. La fonction $p = 0$ convient. \square

A.2.5 Intégration des équations de Cauchy-Riemann

On a déjà parlé de la difficulté de trouver une solution au problème suivant : étant donnée une fonction f sur le bord lisse X d'un ouvert U , vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens des distributions, peut-on trouver g holomorphe à l'intérieur de U , dont la trace au bord soit f ? On sait qu'on dispose d'une telle "réciproque de la trace" lorsque f est lisse.

Dans les trois articles [Koh63], [Koh64], [KR65], Kohn et Rossi démontrent le théorème suivant :

Théorème 9 (Kohn). Soit U un ouvert fortement pseudoconvexe et relativement compact d'une variété M , h une forme hermitienne sur M et $X = \partial U$.

On note d'une part $H^2(X)$ la clôture, pour la topologie L^2 , de l'ensemble $\{f \in C^\infty(X), \bar{\partial}_b f = 0\}$, et d'autre part $H^2(D)$ la clôture, pour la topologie L^2 , de l'ensemble $\{f \in C^\infty(\bar{U}), \bar{\partial} f = 0\}$.

Alors l'application réciproque de la trace a une unique extension continue $H^2(X) \rightarrow H^2(D)$, qui est bijective.

Ce théorème provient d'un résultat de régularité du problème $\bar{\partial}$ -Neumann, démontré dans [Koh64], et qui permet également de démontrer le théorème de Newlander-Nirenberg.

Dans ces articles n'apparaissent que les constructions de géométrie complexe que nous avons données, et des outils de théorie spectrale. La preuve est néanmoins longue et nécessite d'obtenir un résultat de régularité du problème $\bar{\partial}$ -Neumann pour des formes de degré quelconque, puisqu'un argument de dualité est utilisé à la fin. L'exposé complet du raisonnement dépasse le cadre de ce rapport, d'autant que les articles en question sont facilement lisibles.

Nous citons pour finir deux résultats de ces articles :

Proposition A.28. Soit B le projecteur orthogonal sur $H^2(D)$. Alors il existe un opérateur continu F tel que $Id = B + F\bar{\partial}$.

On rappelle que μ est un opérateur de restriction de formes sur $\text{Vois}(X)$ à des formes sur X . On a alors :

Proposition A.29. Il existe une constante C qui ne dépend que de U , telle que si α est une forme sur M vérifiant $\bar{\partial}\alpha = 0$ dans U et $\bar{\partial}^* \alpha = 0$ dans U , alors $\|\alpha\|_{L^2(U)} \leq C \|\mu\alpha\|_{L^2(X)}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [BdM75] L. Boutet de Monvel. Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (dit "Goulaouic-Schwartz")*, pages 1–13, 1974-1975.
- [BdMG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*. Number 99 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1981.
- [BdMS75] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. *Journées équations aux dérivées partielles*, 34-35 :123–164, 1975.
- [Bor00] David Borthwick. Introduction to Kähler quantization. *Contemporary Mathematics*, 260 :91, 2000.
- [BPU98] David Borthwick, Thierry Paul, and Alejandro Uribe. Semiclassical spectral estimates for toeplitz operators. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 48, pages 1189–1229, 1998.
- [Dem97] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. Citeseer, 1997.
- [DS98] B Douçot and P Simon. A semiclassical analysis of order from disorder. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(28) :5855, 1998.
- [FG02] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*. Number 213 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.
- [Hel88] Bernard Helffer. Semi-classical analysis for the schrödinger operator and applications. *Lecture notes in mathematics*, 1336, 1988.
- [Hör71] Lars Hörmander. Fourier integral operators. i. *Acta mathematica*, 127(1) :79–183, 1971.
- [Hör85] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*. Classics in Mathematics. Springer, 1985.
- [Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. Reprint of the second (1990) edition*. Springer, Berlin, 2003.

- [Hör07] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Classics in Mathematics. Springer, 2007.
- [Koh63] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 1. *Annals of mathematics*, pages 112–148, 1963.
- [Koh64] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 2. *Annals of mathematics*, pages 450–472, 1964.
- [Kos70] Bertram Kostant. *Quantization and unitary representations*. Springer, 1970.
- [KR65] Joseph J Kohn and Hugo Rossi. On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. *Annals of Mathematics*, pages 451–472, 1965.
- [Kra92] Steven G Krantz. *Partial differential equations and complex analysis*, volume 6. CRC press, 1992.
- [Kra13] Steven George Krantz. *Geometric analysis of the Bergman kernel and metric*. Springer, 2013.
- [LF14] Yohann Le Floch. *Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D*. PhD thesis, Rennes 1, 2014.
- [MM12] Xiaonan Ma and George Marinescu. Berezin-toeplitz quantization and its kernel expansion. *arXiv preprint arXiv :1203.4201*, 2012.
- [MS75] Anders Melin and Johannes Sjöstrand. Fourier integral operators with complex-valued phase functions. In *Fourier integral operators and partial differential equations*, pages 120–223. Springer, 1975.
- [Sou67] Jean-Marie Souriau. Quantification géométrique. applications. In *Annales de l’institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, volume 6, pages 311–341. Gauthier-Villars, 1967.
- [Ste72] Elias M Stein. *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. Princeton University Press, 1972.
- [SZ02] B. Shiffman and S. Zelditch. Asymptotics of almost holomorphic sections on symplectic manifolds. 2002.
- [Tia90] Gang Tian. On a set of polarized kähler metrics on algebraic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 32(1) :99–130, 1990.
- [Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. 2002.

- [Woo97] Nicholas Michael John Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford University Press, 1997.
- [Zel00] S. Zelditch. Szego kernels and a theorem of Tian. 2000.
- [Zwo12] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138. American Mathematical Soc., 2012.