Inégalités élémentaires

Alix Deleporte

20 août 2015

Ce cours fait suite au cours de dénombrement, dont il reprend en partie le formalisme.

1 Réordonnements

1.1 L'inégalité du réordonnement

Proposition 1. Soient $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ et $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ deux séquences décroissantes de nombres. Alors si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, la somme $S_\sigma = \sum_k a_k b_{\sigma(k)}$, est maximale lorsque $\sigma(k) = k$ pour tout k, et minimale lorsque $\sigma(k) = n+1-k$ pour tout k.

Démonstration. Commençons par démontrer la proposition lorsque $n = 2$. Si $a_1 > a_2$ et $b_1 > b_2$, alors

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0.$$

Ceci permet de conclure.

On va montrer le cas général en s'appuyant sur ce qu'on vient de démontrer. Soit n quelconque, et soit σ une permutation, et supposons qu'il existe $i < j$ tels que $\sigma(i) \leq \sigma(j)$. Alors $a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} \leq a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)}$. Comme l'ensemble des S_σ est fini, son maximum est atteint. Or on vient de démontrer que son maximum est atteint sur les permutations croissantes. Il n'existe qu'une permutation croissante, c'est celle qui à tout k associe k.

De même, on peut démontrer que le minimum est atteint en les permutations décroissantes, mais il n'y a qu'une permutation décroissante. $\square$

Exercice 1. Soient a, b, c trois réels non nuls. Montrer que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

<u>*Solution de l'exercice 1.*</u> Sans perte de généralité, on peut supposer que $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{c}{a}$. On peut alors directement appliquer l'inégalité du réordonnement :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b},$$

ce qui permet de conclure une fois les fractions simplifiées. $\square$

Exercice 2. Soient x, y, z trois réels positifs. Montrer que $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$.

<u>*Solution de l'exercice 2.*</u> Sans perte de généralité, on peut supposer $x \geq y \geq z$, ainsi $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ par positivité. Alors en appliquant une première fois l'inégalité du réordonnement, on a

$$x^3+y^3+z^3 \geq xy^2+yz^2+zx^2.$$

Mais on a également $xy \geq xz \geq yz$ par positivité, donc

$$xy^2+zx^2+yz^2 \geq xyz+xyz+xyz,$$

ce qui permet de conclure. $\square$

1.2 Inégalité de Tchebychev

Proposition 2. Soient $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ et $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ deux séquences décroissantes de nombres. Alors (première inégalité de Tchebychev) :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_j\right).$$

Si l'une des deux suites est rangée dans l'ordre inverse, l'inégalité change de sens. (deuxième inégalité de Tchebychev)

Démonstration. On sait que pour tous i et j, on a $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$. En sommant ces inégalités, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

En développant, on trouve :

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j b_i \geq 0$$

Les deux premiers termes sont égaux, les deux derniers sont égaux à $(\sum a_i)\left(\sum b_j\right)$. On a donc le résultat demandé en divisant par 2.

Si l'une des suites est dans l'ordre inverse, on change le sens de toutes les inégalités. □

Exercice 3. Démontrer l'inégalité de Tchebychev à partir de l'inégalité du réordonnement.

<u>*Solution de l'exercice 3.*</u> En utilisant l'inégalité du réordonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \\
a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1 \\
&\ldots \\
a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1}.
\end{aligned}$$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

□

Exercice 4. (Nesbitt) Soient a, b, c trois réels positifs non null. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice 4. Sans perte de généralité, on suppose $a \geq b \geq c$, ce qui implique $(a+b)^{-1} \leq (a+c)^{-1} \leq (b+c)^{-1}$. On peut donc appliquer la première inégalité de Tchebychev :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right)$$

On sent bien qu'on doit appliquer cette fois la deuxième inégalité de Tchebychev, avec l'astuce $a+b+c = \frac{1}{2}(a+b+b+c+c+a)$. On obtient :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b}\right)$$

□

1.3 L'inégalité de la moyenne

Proposition 3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. On a alors l'inégalité :

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Démonstration. Elle n'utilise que ce qu'on a vue, mais elle est laborieuse. On l'admet ici. □

Remarque 4. On appelle moyenne géométrique le terme de gauche, et moyenne arithmétique le terme de droite.

Le résultat a déjà été démontré pour $n = 2$ et $n = 3$.

2 TD

Exercice 1. Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer que

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Exercice 2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que pour tous réels x, y, z strictement positifs, on a :

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(ax+bz)(bx+az)} + \frac{z^2}{(ax+by)(bx+ay)} \geq \frac{3}{(a+b)^2}.$$

On pourra commencer par montrer que pour tous réels positifs a, b, c, d, on a $(ac+bd)(ad+bc) \leq \frac{1}{2}(a+b)^2(y^2+z^2)$.

Cette inégalité peut-elle être améliorée ?

Exercice 3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On appelle *moyenne harmonique* des (x_i) la quantité $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$.

On appelle aussi *moyenne quadratique* la quantité $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Établir une chaîne d'inégalités entre les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique.

Exercice 4. Montrer que, pour tout entier $n > 1$, on a

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 5. (Olympiades maghrébines - 1986) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres dont le produit vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$. Montrer que :

$$(1+2^2a_1)(1+2^4a_2)\ldots(1+2^{2n}a_n) \geq 2^n.$$

Exercice 6. Soient $n \leq m$ deux entiers positifs. Démontrer que :

$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n$$