# TD : polynômes

**Exercice 1.** Trouver toutes les racines du polynôme $X^5 + X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 7X - 7$.

**Exercice 2.** Soit un pentagone régulier de côté 1. Quelle est la longueur de sa diagonale ?

**Exercice 3.** Trouver un polynôme P de degré $n$ tel que $P(0) = 1$, et $P(j) = 0$ pour tout entier $1 \leq j \leq n$.

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts, et $y_0, \dots, y_n$ des réels. Trouver un polynôme P tel que, pour tout entier $0 \leq j \leq n$, on ait $P(x_j) = y_j$.

**Exercice 4.** Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme.

Relier les racines de P aux racines du polynôme rétrograde $\reflectbox{P}(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$.

**Exercice 5.** Vrai ou faux ?

1. Quand on additionne deux polynômes de degré $n$, on obtient un polynôme de degré $n$.
2. Un polynôme de degré $n$ peut avoir n'importe quel nombre de racines entre 0 et $n$.
3. Si un polynôme P est tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$, alors tous les coefficients de P sont dans $\mathbb{Z}$.
4. Même question avec $\mathbb{Q}$.
5. Pour que le quotient P/Q de deux polynômes soit à nouveau un polynôme, il faut et suffit que toute racine de Q soit une racine de P.

**Exercice 6.** Donner un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dont les racines ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et que $a \notin \mathbb{Q}$ est une racine de P, est-ce que $\frac{P(X)}{X-a}$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 7.** Quels sont les polynômes qui divisent tous les polynômes ?

**Exercice 8.** On définit la suite de Fibonacci de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

A l'aide du polynôme $X^2 - X - 1$, donner une expression générale de $F_n$.