

# Raisonnements de base

Alix Deleporte

13 septembre 2015

Ce premier cours ne suppose que très peu de prérequis, on y expose divers modes de raisonnement en mathématiques.

## 1 La récurrence

Le principe de récurrence est extrêmement utile en mathématiques, car il permet de démontrer, en un nombre fini d'étapes, un résultat pour un nombre infini de cas.

**Proposition 1.** Soit  $P(n)$  une proposition qui dépend d'un entier  $n$ . On suppose que  $P(0)$  est vrai, et que pour tout  $n$ , si  $P(n)$  est vrai, alors  $P(n+1)$  est vrai.

Alors la proposition  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$ .

**Remarque 2.** Le concept de *démonstration* du principe de récurrence est à prendre avec des pincettes. Pour certains, c'est un axiome (Peano). Pour d'autres, cela découle d'axiomes sur la théorie des ensembles (Zermelo-Frenkel). Nous ne nous aventurons pas sur ces pavés glissants.

**Exercice 1.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

Solution de l'exercice 1. Cette proposition ne passe manifestement pas à la récurrence. Pour contourner cela, on va démontrer une proposition plus forte, à savoir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Cette proposition est vraie pour  $n = 1$ . Dispose-t-on d'une hérédité? Supposons le résultat vrai au rang  $n$ , alors

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &< 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &< 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &< 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat au rang  $n + 1$ .

On peut donc appliquer le principe de récurrence, ce qui permet de conclure à la validité de ce résultat, pour tout  $n$ .  $\square$

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier de la forme  $2^k$  pour  $k \geq 1$ . Prouver que, dans tout sous-ensemble de  $2n - 1$  entiers positifs, on peut trouver un sous-ensemble de  $n$  entiers dont la somme est divisible par  $n$ .

*Solution de l'exercice 2.* Essayons de raisonner par récurrence. Pour  $k = 1$ , le problème se reformule comme suit : parmi trois entiers naturels quelconques, peut-on en choisir deux dont la somme est paire? Clairement, ou bien au moins deux d'entre eux sont pairs, auquel cas c'est vrai, ou bien au plus l'un d'entre eux est pair, auquel cas c'est vrai aussi.

Supposons le résultat connu pour l'entier  $k$ . Posons  $n = 2^k$ , et considérons un ensemble  $A$  de  $4n - 1$  entiers. Parmi ceux-ci, on peut trouver par hypothèse un sous-ensemble  $A_1$ , avec  $n$  éléments, tel que la somme des éléments de  $A_1$ , notée  $S_1$ , est divisible par  $n$ . Parmi les  $3n - 1$  éléments de  $A \setminus A_1$ , il en existe encore  $n$ , formant un sous-ensemble noté  $A_2$ , tel que la somme  $S_2$  des éléments de  $A_2$  est divisible par  $n$ . Enfin  $A \setminus (A_1 \cup A_2)$  contient  $2n - 1$  éléments, donc on peut en trouver un sous-ensemble  $A_3$ , dont la somme des éléments  $S_3$  est divisible par  $n$ .

Étudions la parité des trois entiers  $S_1/n, S_2/n, S_3/n$ . Comme dit plus haut, il en existe deux ayant la même parité, donc leur somme est paire. On a bien trouvé  $2n$  éléments d'un ensemble de  $4n - 1$  éléments, dont la somme est divisible par  $2n$ .  $\square$

## 1.1 Le principe des tiroirs

Le problème précédent a fait intervenir le fait suivant : parmi trois entiers, il en existe deux de même parité. En effet, s'il n'y en avait qu'au plus un impair et au plus un pair, on ne pourrait pas avoir trois éléments. Ce principe se généralise :

**Proposition 3.** Soient  $n$  et  $k$  deux entiers, et supposons que  $nk + 1$  chaussettes rangées dans  $k$  tiroirs. Alors il existe au moins un tiroir contenant au moins  $n + 1$  chaussettes.

**Démonstration.** Supposons par l'absurde que chaque tiroir contient au plus  $n$  chaussettes. Alors l'ensemble des tiroirs ne peut pas contenir plus de  $nk$  chaussettes au total.  $\square$

**Remarque 4.** Ici, on voit apparaître deux aspects importants de la logique. Le premier est le raisonnement par l'absurde. Pour prouver un résultat, on suppose qu'il est faux, et on aboutit à une contradiction. Le deuxième est plus subtil, il s'agit de la négation des quantificateurs. Pour nier la proposition « au moins un tiroir vérifie  $A$  », on a supposé « aucun tiroir ne vérifie  $A$  », ce qui est la bonne façon de faire. De même, la négation de « tous les tiroirs vérifient  $A$  » est bien « au moins un tiroir ne vérifie pas  $A$  ». Une source d'erreur courante consiste à s'emmêler les pinceaux.

**Exercice 3.** On considère six points, ainsi que l'ensemble des segments qui relient ces points. On colorie chaque segment, soit en rouge, soit en bleu.

Montrer qu'on peut former un triangle avec trois de ces points, dont tous les côtés sont de la même couleur.

*Solution de l'exercice 3.* Soit  $A$  l'un des points. Il y a cinq segments qui passent par  $A$ ; donc parmi le lemme des tiroirs, il en existe trois de la même couleur. Sans perte de généralité, il en existe trois bleus, et ce sont les segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ .

Considérons les segments du triangle  $BCD$ . Alors, ou bien ils sont tous les trois rouges, auquel cas on a gagné, ou bien l'un d'entre eux est bleu, auquel cas le triangle formé des extrémités de ce segment et de  $A$  n'a que des segments bleus.  $\square$

**Remarque 5.** Avec cinq points, le résultat est faux. On peut généraliser le problème : si on se donne  $m$  couleurs, quel est le plus petit graphe complet qu'on ne peut pas colorer en  $m$  couleurs sans qu'il y ait un triangle d'une seule couleur ? Ce problème est très difficile.

**Exercice 4.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Quelle est la plus petite valeur de  $n \in \mathbb{N}$  telle que parmi  $n$  entiers quelconques, on puisse toujours en trouver 2 dont la somme ou la différence est un multiple de  $2k$  ?

**Démonstration.** Considérons les « tiroirs » suivants :

$$\{0, 2k\}, \{1, 2k - 1\}, \{2, 2k - 2\}, \dots, \{k - 1, k + 1\}, \{k\}.$$

On voit que deux nombres voient leur somme ou leur différence être un multiple de  $2k$ , ssi leurs restes dans la division par  $2k$  appartiennent au même tiroir. Or, il y a manifestement  $k + 1$  tiroirs. Donc si  $n \geq k + 2$ , on peut toujours trouver deux nombres parmi  $n$  nombres quelconques. Réciproquement, si  $n = k + 1$ , on peut considérer les  $n$  nombres  $0, 1, \dots, k$ , qui appartiennent chacun à un tiroir différent.  $\square$

## 1.2 La descente infinie

C'est un principe un peu dual de la récurrence, qui consiste à démontrer que si un résultat concernant un entier  $n$  est vrai, alors il est aussi vrai pour un autre entier  $k < n$ ; pour démontrer que ce résultat est toujours faux, il n'y a plus qu'à montrer qu'il est faux pour  $n = 1$ .

**Exercice 5.** On considère, pour  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ , l'équation

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

Montrer que le triplet  $(0, 0, 0)$  est la seule solution à ce problème.

Solution de l'exercice 4. On observe que si un triplet est solution, alors  $x$  est pair. En écrivant  $x = 2w$ , et en divisant l'équation par 2, on obtient

$$4w^3 + y^3 = 2z^3$$

soit encore

$$(-y)^3 + 2z^3 = 4w^3$$

Ainsi, le triplet  $(-y, z, x/2)$  est solution. Donc  $y$  est pair, et en réitérant, le triplet  $(-z, x/2, -y/2)$  est solution. Donc  $z$  est pair, et on recommence : le triplet  $(-x/2, -y/2, -z/2)$  est solution.

On peut raisonner par descente infinie : on continue jusqu'à une solution contenant un entier impair, aboutissant à une absurdité.  $\square$

**Remarque 6.** D'autres principes, comme la recherche d'invariants, ne font pas l'objet de théorèmes, et seront étudiées plus tard.

## 2 TD

**Exercice 1.** (Proposé à l'OIM 1988) Soient  $a_1, \dots, a_{11}$  des entiers. Montrer qu'il existe des nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_{11}$ , non tous nuls et appartenant chacun à  $\{-1, 0, 1\}$ , tels que  $\sum_{i=1}^{11} \alpha_i a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{11} a_{11}$  est divisible par 1988.

**Exercice 2.** Soit  $\alpha$  un réel, et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$ , tous deux non nuls, vérifiant

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{np}$$

**Exercice 3.** Cette année, il y a 17 élèves au Cercle de Mathématiques de Strasbourg; ils s'échangent régulièrement des mails sur des exercices, qui peuvent être de trois types : analyse, géométrie ou combinatoire. On suppose que deux quelconques d'entre eux communiquent toujours sur le même thème.

Montrer qu'au moins trois élèves s'écrivent les uns les autres sur le même sujet.

**Exercice 4.** À l'université de Strasbourg, il y a 2015 chercheurs. Certains se connaissent, d'autre pas; on suppose que si A connaît B alors B connaît A.

Montrer qu'il existe deux chercheurs connaissant le même nombre de chercheurs.

**Exercice 5.** On considère une étoile pentagonale régulière. On suppose que la longueur des côtés du pentagone régulier intérieur vaut 1, et on appelle  $x$  la longueur des 10 segments de l'étoile.

Montrer que la longueur des diagonales du pentagone vaut  $x$ . En déduire une équation polynomiale sur  $x$ . Montrer alors que  $x$  est irrationnel (sans résoudre l'équation!)

**Exercice 6.** Une compétition mathématique constitue en trois épreuves, chacune notée par un entier de 0 à 7. Cette année, 49 étudiants participent à la compétition. Montrer qu'on peut trouver deux étudiants A et B tels que chaque note qu'a obtenue A à l'un des épreuve est supérieure ou égale à la note de B à cette épreuve.

On pourra se ramener au cas où il n'existe pas deux élèves ayant eu la même note à deux épreuves.