# Analyse réelle
# 1ère année, semestre 2
# TD Feuille 6

**Exercice 1.** Trouver

1. une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et discontinue en 0.
2. une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et discontinue sur $\mathbb{R}^*$.
3. (*) une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 2.** Les définitions suivantes ressemblent à celle de la continuité d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Pouvez-vous décrire ces ensembles de fonctions ?

1. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| < \epsilon)$.
2. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon \geq 0, \exists \delta > 0, (|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq \epsilon)$.
3. $\forall x_* \in I, \forall \epsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0, (|x - x_*| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq \epsilon)$.

**Exercice 3.** **(DM pour le 09/04)** Après avoir montré que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$, étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Exercice 4.** On note $E$ la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$. ($E(\sqrt{2}) = 1$, $E(-\pi) = -4$.)
Étudier la continuité de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ :

$$f : x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2.$$

**Exercice 5.** Soient $f$ et $g$ les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) - x \qquad\qquad g : x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Montrer que $\forall x \geq 0, g(x) \leq 0 \leq f(x)$.
2. Établir une assertion similaire lorsque $x \leq 0$.
3. En déduire que la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^*$,

$$h : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0.

**Exercice 6.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles, continues sur un ensemble $I$. Montrer que $\max(f, g)$ est continue sur $I$.