Analyse réelle
1ère année, semestre 2
TD Feuille 9

Exercice 1. On veut étudier (à nouveau) les sommes $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'encadrement précédent pour $x = 1$, $x = 2$, jusque $x = n-1$. En déduire que
$$s_{n-1} < \ln(n) < s_{n-1}.$$
3. En déduire que $\lim s_n = +\infty$, et plus précisément, que $s_n \sim \ln(n)$.

Exercice 2.

— Montrer que la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0 :
$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$
Quelle est la valeur de $f(0)$?

— Donner un développement limité de f à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?

Exercice 3. (DM pour le 14/05)

— Montrer que la fonction suivante est prolongeable par continuité en 0 :
$$g : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$
Quelle est la valeur de $g(0)$?

— Donner un développement limité de g à l'ordre 1 en 0. En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(0)$?

Exercice 4. Calculer les limites des expressions suivantes en zéro
$$\frac{e^x-1}{x} \qquad \frac{e^{x^2}-1}{x} \qquad \frac{\sin(x)}{x} \qquad \frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} \qquad \ln(1+x)\ln(e^x-1) \qquad \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{1-x}\sin(x)}.$$

Exercice 5. À l'aide d'un développement limité, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Exercice 6. On considère la fonction réelle suivante :
$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2+x^2+x^8}.$$
Donner son polynôme de Taylor d'ordre 6 en zéro.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathbb{C}^3$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner un équivalent simple, quand $h \to 0$, de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.
2. Donner un équivalent simple, quand $h \to 0$, de $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - f'(a)$.